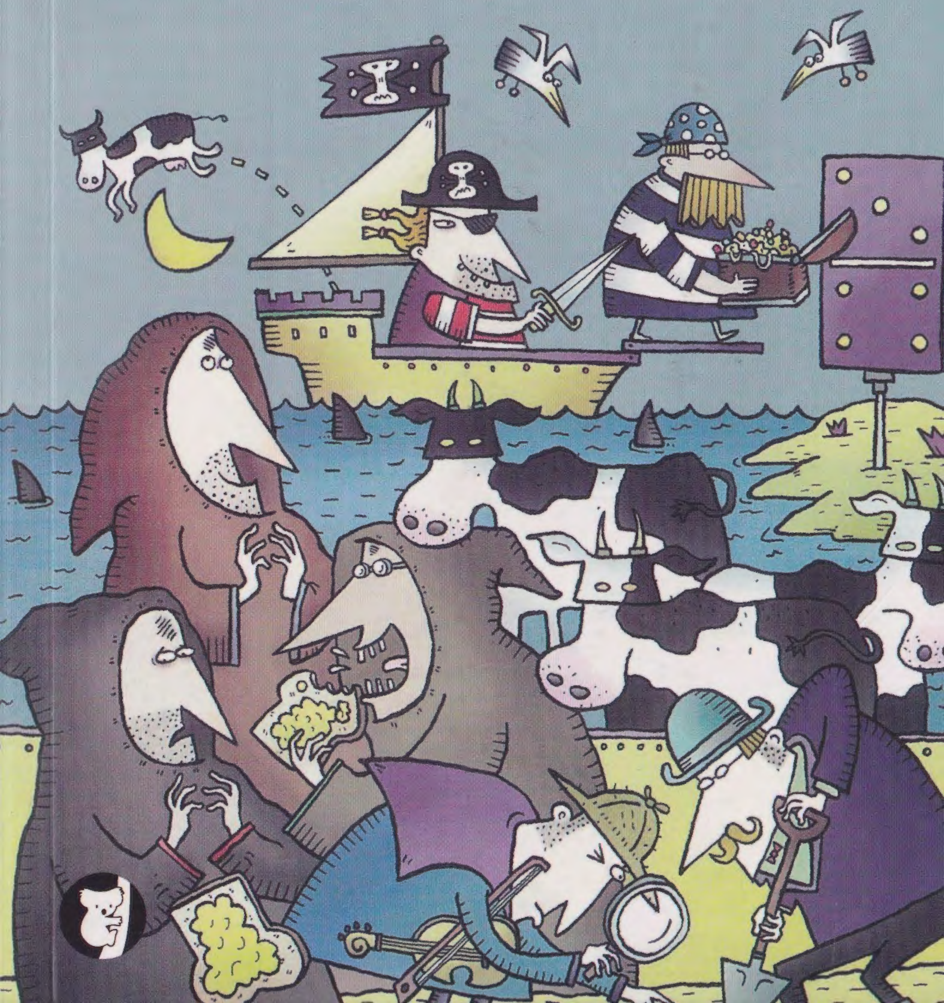
IAN STEWART

MATEMATİK HİSTERİSİ

Matematiğin Garip ve Sihirli Dünyası





MATEMATİK HİSTERİSİ

Matematiğin Garip ve Sihirli Dünyası

Çekirdek çitlerken okuyabileceğiniz iki matematik kitabından biri!

Daha önce Martin Gardner'in *Matematikçinin Galaksi Rehberi* isimli kitabıyla başladığımız matematiksel yolculuğumuz devam ediyor.

Popüler Matematiğin en önemli isimlerinden sayılan Ian Stewart'ın garip ve sihirli dünyasına hoş geldiniz!

Bazen her şeyden sıyrılıp kaybolmak istemez misiniz? Peki içinde sayıların olduğu merak uyandırıcı, aklın sınırlarını zorlayıcı ve üstelik çok eğlenceli bir maceraya ne dersiniz?

Matematiksel keşiflere dair 20 ilginç hikaye! Dünyanın en tuhaf karakterleri! Mantık şaşırtmacaları! Acayip sayılar! Yağlı ekmeğin hep yağlı yüzeyi üstüne düşmesi gibi işlevsel konulara dair zihni sinir bulmacalar!

İşte size *Matematik Histerisi*!



'Matematik eğlenceli olabilir! Dahası, Ian Stewart'ın layıkıyla yaptığı gibi, gündelik dilde de anlatılabilir... Matematiğin bu denli herkesin anlayabileceği halde sunulması gerçekten çok büyük bir sürpriz.'

–GOOD BOOK GUIDE

aylak

ISBN 978-605-5693-70-7
9 786055 691707

aylak

Ian Stewart

Warwick Üniversitesi'nde matematik profesörü olarak çalışmakta ve biomatematikten dinamik sistemlere kadar birçok konuda yazdığı akademik makalelerle tanınmaktadır. Ayrıca, matematiğin ve ilgili bilim dallarının popülerleşmesi üzerine çabaları, kitapları ve *Scientific American*'daki köşesiyle de bilinmektedir. Bu uğraşları sonucunda, Royal Society of London tarafından verilen Michael Faraday Ödülü'ne laik görülmüştür. Günümüzde popüler matematik üzerine aktif olarak çalışma yapan yazarlar arasında en çok tanınanlardan biridir.

Matematik Histerisi
Matematiğin Garip ve Sihirli Dünyası
Ian Stewart

Özgün Künye
Math Hysteria
Fun and Games with Mathematics

AYLAK KİTAP

Çeviri: Ahmet Nedim Narman
Grafik Tasarım: Kübra Tekeli

1. Baskı, Eylül 2013
Aylak Kitap: 30
ISBN: 978-605-5691-70-7

AYLAK KİTAP
Caferağa Mh. Nailbey Sk.
Umut İşhanı No: 15
Daire: 8 Kadıköy / İstanbul
Tel: 0 216 345 40 69 (pbx)
Faks: 0 216 345 40 68

Baskı
Deniz Ofset: Gümüşsuyu Cad. Odin İş Merkezi B Blok/403
Topkapı-İstanbul Tel: 0212 613 30 06
Sertifika No: 25001

www.aylakkitap.com
aylakkitap@aylakkitap.com

IAN STEWART

MATEMATİK HİSTERİSİ

Matematiğin Garip ve Sihirli Dünyası

Çeviren: Ahmet Nedim Narman

aylak

İçindekiler

Giriş

Ben 16 yaşlarındayken, aydan aya sabırsızlıkla beklediğim olaylardan biri de *Scientific American*'da Martin Gardner'ın hazırladığı "Matematiksel Oyunlar" köşesini okumaktı. Her ay köşede ilgimi çekecek yeni, matematiksel ve eğlenceli birşey vardı. Mükemmel matematik hocalarına sahip olacak kadar şanslı olduğumdan, matematiğin keyifli bir şey olduğunu ve taşa yazılmış gibi değişmez ve sabit olmadığını biliyordum. Martin Gardner'ın köşesi de bu mesajları kuvvetlendirdi. Köşe, oyunlar üzerine kurulmuş olsaydı da (sonraları –nedendir bilmem– bölümün adı "Matematiksel Eğlence ve Dinlencelikler" oldu ki bu kulağa daha dolu geliyor), eğlenceye karıştırılmış bol miktarda ciddi matematik vardı.

Martin Gardner'ın köşesi matematikçi olmamı sağlayan sebeplerden biridir demek, muhtemelen doğru olur. İlgimi üzerinde tutarak, yeni fikirlere ve yaratıcı düşünceye her zaman yer bulunabileceğini açıkça gösterdi. Birçok profesyonel meslektaşımın aksine matematiğin "ciddi" taraflarını "eğlenceli" yanlarından ayırma ihtiyacını da hiç hissetmedim. Aralarındaki farkı göremediğimden değil, sadece aşırı önemli olduğunu düşünmüyorum. Sonuçta benim değer verdiğim şey matematik, ve matematiksel işi de matematiksel oyunu da aralarında ayrım gütme ihtiyacı hissetmeden, eğlenerek yaptım.

Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics* kitabında şöyle der: "*Scientific American* ile uzun ve mutlu birlikteliğim... 1952 yılında dergiye mantık makinelerinin tarihi üzerine bir makale satmamla başladı." Martin dümendeki 25 yıldan sonra başka ufuklara yönelmeye karar verdi ve köşesi de kapılmaya müsaitti. *Gödel, Escher, Bach, an Eternal Golden Braid*'in Pulitzer ödüllü yazarı, Douglas Hofstadter, ilk kapan oldu. Köşenin isimini "Metamagikal Temalar" olarak değiştirdi. Sonrada Kee Dewdney, *The Plainverse*'ün yazarı, eğerleri eline aldı ve köşe de "Bilgisayar Eğlence ve Dinlencelikleri" oluverdi. Bu noktada, Matematik Köşelerinin Tanrısı akıma katılmam için bana da bir fırsat vermeye karar vermişti, ama bu İlah'ın müdahalesinin anlaşılır hale gelmesi biraz zaman alacaktı.

Olayı başlatan Fransızlar oldu. *Scientific American* bir düzineden fazla dile; bunlar arasında da Fransızcaya çevriliyordu. "Çevriliyordu" çok da doğru bir kelime değil, çünkü her yabancı dil baskının kendisine has içeriği de vardı ve makaleler bazen bir aydan ötekisine kaydırılabiliyor ya da tamamen çıkarılabiliyorlardı. Fransız baskısının ismi *Pour La Science*'dı, ve editörü Philippe Boulanger, Matematiksel Eğlencelikler ve Dinlencelikler köşesini Bilgisayar Eğlencelikler ve Dinlencelikler yenilemesiyle beraber devam ettirmek istiyordu. Bu yüzden de bazı Fransız matematikçileri bu köşeye katkıda bulunmaları için ikna etti. Böylece birkaç yıl ta ki en düzenli katılımcı daha fazla devam edemeyeceğine karar verinceye kadar geçti gitti. Bir seri tesadüfler sonucu ben devralmaya davet edildim ki bu teklifi çeviklikle kabul ettim. İlk köşem Eylül 1987'de yayınlandı. Birkaç seneden sonra köşem, Alman, İspanyol, İtalyan ve Japon baskılarına da yayılmıştı. Aralık 1990'da, Bilgisayar Eğlence ve Dinlencelikleri yeniden Matematik Eğlence ve Dinlenceliklerine metamorfoz ettikten birkaç ay sonra, ana dergideki söz konusu köşeyi ben devraldım.

Benim de *Scientific American*'la, 11 yıllık bir süre içerisinde 96 makale yazdığım uzun ve mutlu bir ilişkim oldu. Bir 57 tane daha da *Pour La Science* ve diğer çeviriler için yazdım; bunlar-

dan bazıları ana dergiye katılım sağlamadan önceki yazılarım, bazılarıysa Amerika'da iki ayda bir çıkan köşeyi, Fransa'da ayda bir çıkan köşeye dönüştürmek için yazdıklarımdı. Yine Gardner ile başlayan gelenek uyarınca, o köşelerden bazıları kitap haline getirildi bile: bunlar İngilizcede *Game, Set and Math ve Another Fine Math You've Got Me Into* kitaplarıdır. Fransızca ve Almanca olarak başka kitaplar da var. Nihayetinde her köşenin en az bir –ve tercihen en fazla bir– kitapta yer alacağını ümit ediyorum. *Matematik Histerisi* de bu programdaki bir adımdır ve şimdiye kadar kitap şeklinde bulunmayan 20 makale içerir.

Martin Gardner, başarısının takibi mümkün olmayan bir karakter. Varislerinin büyüsel Gardner formülünü tekrar etmelerine yönelik bir beklenti, hiçbir zaman olmadı ve hiç birimizin de böyle bir şey denemediğinden oldukça eminim. En azından ben denemedim. Bizim yapmaya çalıştığımız şey, köşenin ruhunu korumak yani, önemli matematiksel fikirleri oyuncu bir havayla sunmaktı. Bundan 3000 yıl önce, antik Babil'in matematik öğretmenleri, çivi yazısı tabletlere bulmacalar koyarak, öğrencilerinin dikkatini üzerlerinde tuttuklarından emin olmaya çalışıyorlardı. Antik Mısır'da da aynısı yapılırdı. Matematiği ağırbaşlı ve ciddi bir iskelet içerisine almaya dayalı bu aksi geleneği başlatanların, yüksek kültüre verdikleri önemle, antik Yunanlar olduğundan şüpheleniyorum. Öklit ve taklitçilerini, Teorem 46'nın 17. maddesinin Lemma 25'den ve 18. maddesinin de Önerme 12'den çıktığını kontrol etmekle takıntılı oldukları için, matematiği usandırıcı ve mekanik hale getirmekle suçluyorum. İspatlara karşı olduğum falan yok, ama bunun bir yeri, zamanı var ve matematikte görsel öngörü gelişiminin erken evreleri bunlardan ikisi de değil.

Kitaptaki bölümler herhangi bir sıraya göre düzenlenmiş değiller ve hemen her yerden girişebilirsiniz, yine de olasılık kuramının Monopoli'ye uygulanması üzerine hazırlanmış o iki bölüm bir mini-dizi olarak tasarlanmışlardır ve öyle okunurlarsa da iyi olur. Konular mantık şaşırtmacalarından (Biliyorum ki Sen Biliyorsun ki...) kombinatoriğe (Kareleri Kareleyelim), acayip sayılara (Güneşin Sığırlarını Saymak) ve Geometriden (Çift

Çözümlü Yapbozlar) , optimizasyon (Büyük Gider Soygunu) ve polihedronlar (Körüklü Sanı) gibi daha ileri seviye konulara kadar geniş bir yelpaze içerir. Bazıları matematiksel oyunlarda yenme stratejileri (Çekimser Çikolata Çokurdatmaları) ya da hasetsiz paylaşımların dolambaçlı protokolü (Ganimetleri Paylaşmak) ya da imkansızlık kanıtları (Domino Teorileri) üzerinedir. Bazıları da pratik meselelerle temas kurar: Antropomorfik İlke, akla uygun kurulmuş bir evrende ekmeğin neden hep yağlı yüzü üzerine düştüğünü ortaya çıkarıyor, Bilgisayarlı Tarihe Giriş, neden her kültürün kendine özgü bir takvimi olduğunu ve bunların nasıl bağıntılı olduğunu açıklıyor, Amaçsal Piramit Yığılımı, Büyük Keops piramidini inşa etmek için kaç işçi gerektiğini hesap ediyor. Eğer bilgisayar oyunları hakkında düşünerek (oynayarak *değil*) bir milyon dolar kazanmak isterseniz de, Windows işletim sistemini yirmi birinci yüzyıl matematiksel araştırmalarının sınırlarıyla ilişkilendiren, Milyon Dolar Mayın Tarlası var.

Teşekkürlerimi –hayır burada söz edilemeyecek kadar gür minnettarlığımı– deli danaları, budala korsanları ve şaşkın keşişleriyle bu sayfaları zenginleştiren Spike Gerrel'a sunmak isterim. Kitabın özünü beni şaşırtan bir anlayış ve kesinlikle yakaladı. Oxford University Press'e ve yayımcı çalışanlarına, editörlerine, düzeltmenlerine ve belli belirsiz bir fikri kitaba çeviren diğer her şeye de teşekkür ederim.

Eğlence ve oyunların içine saklanmış bol miktarda "ciddi" matematik olduğunu itiraf ederek sözlerimin sonuna yaklaşıyorum –en çok göze batan örnekleri müstakil "kutucuklar" içerisine alınmıştır ki kendinizi kandırılmış hissetmeyin. Bu yüzden Arşimet'in ineklerinin garip antikleriyle uğraşırken, Sayılar Kuramının temellerini de kavradığınızdan şüpheniz olmasın. Yine de size bir şey *öğretmeye* çalıştığım falan yok. Sadece insanlığın muhteşem buluşlarından biri olan Matematiğin, birkaç numunesi üzerinden keyfini çıkarmanızı istiyorum.

IAN STEWART
Coventry, Haziran 2003

Şekillerin Bilgilendirmeleri

Şekil 30: *American Mathematical Monthly*'den, yazar ve yayımcının izniyle tekrar basılmıştır.

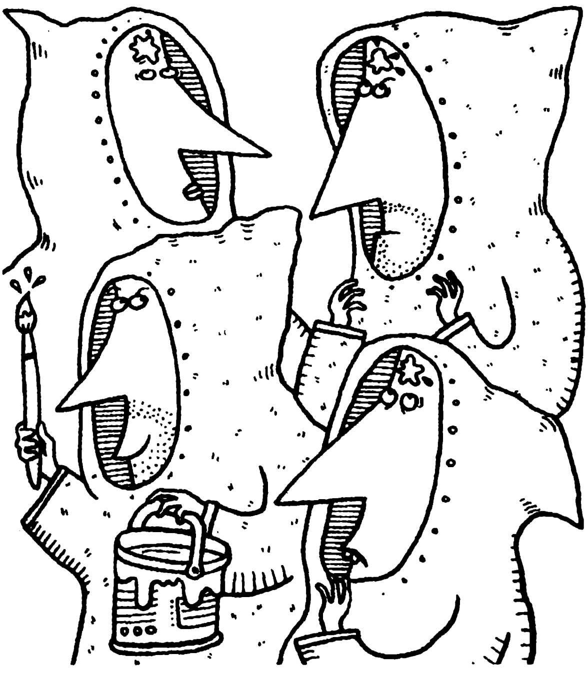
Şekil 22a, 23b, 23c, 25, 26, 27a, 27b, 27c, 29, 30, 31 ve 32: *Dissiections: Plane and Fancy*, 1997, Cambridge University Press, Greg N. Frederickson, yazar ve yayımcının izniyle tekrar basılmıştır.

Şekil 23a, 24 ve 31b: *Journal of Recreational Mathematics*, yazar ve yayımcının izniyle tekrar basılmıştır.

Şekil 27d: *Recreational Mathematics Magazine*, yazar ve yayımcının izniyle tekrar basılmıştır.

1

Biliyorum ki Sen Biliyorsun ki...



Bazen bir şeyleri bilmek yetmez –başka birinin de, bildiğini bilmeniz gerekir. Ya da onların bildiğini sizin bildiğinizi onların da bildiğini... Bunları değerlendirmek "ortak bilgi" kavramını öne çıkarır ki bu önemli bir kavramdır. Bir bilgi bir kere ortak bilgi oldu mu, diğer kişilerin düşünceleri hakkında çıkarımlarda bulunmak mümkündür.

Afal kardeşliğinin aşırı nazik keşişleri birbirlerine mantık şakaları yapmaktan hoşlanırlardı. Bir gece, Archibald ve Benedict kardeş hücrelerinde uyurken, Jonah kardeş sinsice içeriye girer ve her ikisinin de tıraşlı kelini mavi boya ile lekeler. Uyandıklarında, her biri diğerinin kelindeki lekeyi fark eder ama nezaketen, bir şey söylemez. Her biri kendi kafasında da leke olup olmadığını merak eder ama naziklikten, soramaz. Sonra incelik sanatını pek öğrenemememiş Zeno kardeş odaya girer ve kikirdemeye başlar. Sorguya çekilmesi üzerine aklı başına gelir ve "İçinizden en az birinin kafasında mavi leke var." der başka da hiç bir şey söyleyemez.

Tabii ki keşişlerin ikisi de bunun farkındadır. Ama Archibald akıl yürütmeye başlar. "Ben Benedict'in lekesi olduğunu biliyorum ama o bunu bilmiyor... Peki, bende leke var mı? Farz et ki bende leke *yok*. O zaman Benedict, lekem olmadığını görecek ve Zeno'nun işaret ettiği üzere kendisinde leke olduğu sonucuna varacaktır. Ama herhangi bir utanma belirtisi göstermedi –ahhh, *bende* de leke olmalı." Ki o noktada yüzü turp gibi kızarır. Benedict'in yüzü de neredeyse aynı anda ve hemen hemen aynı sebepten ötürü, kızarır.

Zeno'nun masumane açıklaması olmadan ikisinin de zincirleme akıl yürütmesi başlayamazdı ama Zeno –görünüşte– bilmedikleri hiç bir şey söylememiştir ki.

Bu şaşkınlık etkisi, aynı numarayı *üç* keşiş ile denediğimizde daha da kafa karıştırıcı bir hal almaktadır. Şimdi, Archibald, Benedict ve Cyril kardeşler hücrelerinde uyumakta ve Jonah her birinin kafasını mavi boyayla lekeliyor. Yine, uyandıklarında her biri, diğerlerinin kafasındaki lekeyi fark ediyor ama bir şey söylemiyor. İşte bu Meksika mantık çıkmazı Zeno bombasını patlatınca bozuluyor: "İçinizden en az birinin kafasında mavi leke var."

Şimdi, Archibald düşünmeye başlıyor ve düşünceleri şöyle gelişiyor. "Farz et ki bende leke yok. O zaman Benedict, Cyril'in kafasında leke görüyor ama bende bir şey yok. Bundan sonra da kafası şöyle işleyecektir: "Eğer ben, Bendict, bir leke sahibi değilsem, Cyril ne Archibald'da ne de Benedict'te leke olmadığını görecek ve kendi, hem de ta kendisinin bir lekesi olduğunu hemen anlayacaktır. Muhteşem bir mantıkçı olan Cyril'in bunu çözmek için bol bol zamanı vardı, ama hala daha utanmıyor, o zaman ben, Benedict, bir leke sahibi olmalıyım." Şimdi, Benedict'te kusursuz bir mantıkçı olduğundan ve bunu çözmek için yeterli olan süreyi bol bol geçirmiş olmasından ancak bir sonuca varılabilir, ben, Archibald, bir leke *sahibiyim.*" Benzer mantık adımlarını takip etmiş Benedict ve Cyril'in yüzleriyle beraber Archibald'ın yüzü de bu noktada turp gibi kızarır.

Bu akıl yürütme yöntemi, dört, beş ya da daha fazla keşiş ile de şu an için hepsinin kafasında lekesi olduğunu farz edersek, çalışır. Çıkarımları daha dolambaçlı bir hal alır, ama ne kadar keşiş olursa olsun, "İçinizden en az birinin lekesi var" duyurusu, herkesin kendi kafasında da leke olduğu sonucuna varmasına sebep veren bir çıkarım zincirini tetikler. Sayılar büyüyünce keşişlerin düşüncelerini senkronize etmek için bir zamanlama aleti sahibi olmak yardımcı olacaktır ki birazdan aslında neler olduğunu anlama işine giriştiğimizde böyle bir alet sunacağım. Buna benzer paradoksal şeyler, keşişlerden bir kısmının lekesi varken diğerlerinde leke olmadığı durumlarda da gerçekleşiyor –buna da döneceğim.

Bu türde birçok bulmaca vardır, bunlardan bazıları, yüzleri kirlenmiş çocukları, partiye komik şapkalar giyerek gidenleri, ardışık iki tamsayıyı ellerinde tutan ama büyük tamsayının kimde olduğunu bilmeyen iki kişiyi içerir, hatta bir ada kabilesindeki zina ilişkilerini inceleyen ve politik açıdan pek hassas olmayan bir tanesi bile vardır. Herkese malum olan basit bir gerçeğin duyurulmasıyla bütün sürecin başlaması kadar, bu bulmacaların kendisi de ayırt edici bir şekilde afallatıcı. Ne var ki gerçekte neler döndüğünü analiz etmeye başladığınız zaman, söz konusu duyurunun hakikaten de ortaya yeni bir bilgi koyduğu anlaşılıyor. Dilin basitliği genellikle işleri kolaylaştırsa da, bu örnekte olup biteni gizliyor.

İki tane keşiş içeren ilk örneğimize dönelim. Zeno, "En az birinizin kafasında mavi leke var" diye duyurur. Keşişler aslında ne bilmektedir? Şöyle, Archibald, Benedict'in lekesi olduğunu biliyor ve Benedict de Archibald'ın lekesi olduğunu biliyor. Archibald, Zeno'nun açıklamasını duyup da bunu zaten bildiği sonucuna vardığında, onun "en az biri" Benedict. Ama Benedict, Zeno'nun açıklamasını duyup da bunu zaten bildiği sonucuna vardığında, onun "en az biri" de Archibald. Bu ikisi hiç de aynı ifade değil. Zeno'nun açıklaması Archibald'ı, birisinin lekesi olduğu konusunda bilgilendirmekle kalmıyor. Archibald'a o *aynı* birisinin lekesi olduğunu Benedict'in de bildiğini söylüyor. Haliyle Zeno'nun ifade ettiği şey Archibald'a kendi bildikleri hakkında yeni hiç bir şey söylemiyor ama Benedict'in ne bildiği hakkında yeni bir şey söylüyor.

Bu tip dolambaçlı mantık bulmacalarının hepsi aynı mekanizmaya dayanır ve "Ortak Bilgi" bulmacaları olarak bilinirler. Önemli olan açıklamanın içeriği değil, herkesin, diğer herkesin bildiğini öğrenmesidir. Bu gerçek bir kez "ortak bilgi" oldu mu, diğer insanların bu bilgiye gösterecekleri tepki üzerine akıl yürütmek mümkün olur.

Keşişlere dönelim. Şimdi de 100 tane keşiş olsun, hepsinin de lekesi var ve her biri harikulade hızlı birer mantıkçı. Başkeşiş'in, keşişlerin düşüncelerini senkronize etmek amacıyla, küçük bir

zili olsun. "Her on saniyede bir" der Başkeşiş "bu zili çalacağım. On saniye, gerekli mantıksal çıkarımları yapmak için yeterli olacaktır. Ben zili çaldıktan hemen sonra, aranızdan lekesi olduğu sonucuna varanlar ellerini kaldıracak." On dakika boyunca zilin sesi hariç sükunet içinde bekler, ama hiç bir şey olmaz. "Ah, tabii ya, kusura bakmayın unutmuşum, alın size fazladan bir bilgi. En az birinizin lekesi var." Şimdi 99 zil boyunca hiç bir şey olmaz ama 100. zilde, aniden bütün keşişler ellerini kaldırır.

Esasında, mantık şöyle işler. Diyelim ki 100 numaralı keşiş diğer 99 keşişin lekesi oluğunu görebiliyor. "Eğer bende leke yoksa," diye düşünür "diğer 99 kişi bunun farkında. Bu beni hesap zincirinden tamamen çıkarır. O zaman onlar da benim bir lekem olmadığı bu durumda, 99 keşiş için artık hangi mantık çıkarımlarının yapılması gerekiyorsa onu yapıyorlardır. 99 keşiş mantığını doğru çözdüysem, 99 zil sonra hepsi elini kaldıracak." 99. zili bekler ve hiç bir şey olmaz. "Ah, şu halde farz etmiş olduğum şey yanlış olmalı, demek ki bir lekem var." 100. zilde eli yukarı kalkar. Diğer keşişlerinki de aynen.

99 keşiş mantığı da (100 numaralı keşişin lekesiz olduğu varsayımsal durum için) bunun aynısıdır: Şimdi, 99 keşişin her biri *eğer* kendisinin lekesi yoksa, diğer 98 keşişin 98. zilde hep beraber ellerini kaldırmalarını bekliyor. Aynı mantığı böyle tekrarlayarak devam edince, en sonunda bir tek varsayımsal keşişe iniyoruz ki bu keşişte hiç kimsede leke görmemesine rağmen, birinin lekesi olduğu konusunda bilgilendirilince afallıyor, sonrada lekenin *kendi* kafasında olması gerektiği sonucuna varıyor ve ilk zilden sonra elini kaldırıyor.

Bu bir "Matematiksel tümevarım" örneğidir ki o da: Doğal sayılar hakkında bir özelliğin, $n=1$ için doğru olduğu biliniyor ve n ne olursa olsun, n için doğruluğu $n+1$ için de doğruluğunu ima ediyorsa, bu özellik bütün n'ler için doğru olmalıdır, şeklinde ifade edilebilir.

Buraya kadar bütün keşişlerin lekeli olduğunu farz etmiştim, ama benzer bir akıl yürütmeyle kendinizi bunun çok da gerekli bir şart olmadığına ikna edebilirsiniz. Örneğin, 100 keşişten

68'inin lekeli olduğunu farz edelim. O zaman, kusursuz mantığımızla, 68. zile kadar hiç bir şey olmaz ki işte o noktada lekeli bütün keşişler ellerini kaldırır ama diğerleri öyle bir şey yapmaz.

Ortak bilgi bulmacaları yaygın olarak incelenmiştir ve bir takım kullanışlı referanslar, David Gale tarafından yazılmış makalede (bakınız: kitabın sonundaki Ek Kaynaklar bölümü) bulunabilir. Orada bahsi geçen en matematiksel ve en ileri seviye örnek, John Conway (Princeton Üniversitesi) ve Michael Paterson (Warwick Üniversitesi, BK) tarafından icat edilmiştir. Bir Çılgın Matematikçiler partisi hayal edin. Partiye her katılan, üzerinde bir sayı yazılı şapka giysin. Bu sayı sıfırdan büyük ya da eşit olmalıdır, ama tam sayı olacak diye bir şart yok, daha da ötesi, en az bir kişinin sayısı sıfırdan farklı olmalı. Şapkaları öyle bir ayarlayın ki her oyuncu diğer herkesin sayısını görebilsin ama kendi sayısını göremesin.

Ortak Bilgiyi açıklama işi de şöyle yapılsın. Duvarda asılı bir sayılar listesi var. İçlerinden biri oyuncuların şapkalarındaki bütün sayıların toplamı –ama kimse doğru toplamın hangisi olduğunu bilmiyor. Son olarak da listedeki seçenek sayısı, oyuncu sayısına eşit ya da eksik olsun.

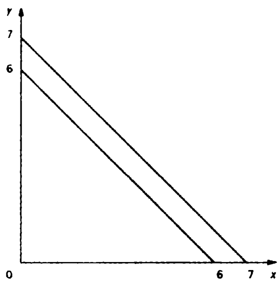
Her on saniyede bir zil çalsın ve kendi sayısını ya da (diğer herkesin sayılarını görebildiklerinden) denk olarak, doğru toplamı bilen herkes, bunu duyurmak *zorunda* olsun. Conway ve Paterson kusursuz mantıkla ispatlamıştır ki eninde ya da sonunda en az bir oyuncu böyle bir duyuru yapacaktır.

Bu, ilk bakışta paradoksal gözükür. Örneğin, farz edin ki her birinin şapkasında 2 yazılı üç tane oyuncu olsun, bu süre zarfında da duvardaki listede 6, 7, 8 sayıları var. Her oyuncu 2+2 ara toplamını diğer oyuncuların şapkasından görecektir, haliyle kendi şapkaları 2, 3 ya da 4 olabilir. Diğer oyuncuların, 6, 7 ve 8 toplamlarına ulaşmak üzere, 2+2, 2+3 ya da 2+4 (hatırlatmak isterim ki bütün oyuncular olmasa bile, bazılarının şapkalarında 0 sayısını taşımaya hakkı var) ara toplamlarına bakıyor olabileceklerini düşünürler. Haliyle hiç bir toplam ihtimal dışı bırakılamaz. Ne var ki, zile şükürler olsun, oyuncular diğer oyuncuların kendi sayılarını bildiklerine dair herhangi bir duyuru yapmamış

olmasından çeşitli çıkarımlarda bulunabilirler. Her zilde belli sayı kümeleri ihtimal dışı bırakılmaktadır, bu da bizleri Conway ile Paterson'ın şaşırtıcı sonucuna yönlendirir.

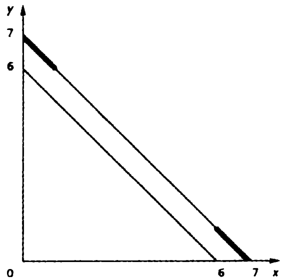
Olayla alakalı kavramlar hakkında bir fikir edinebilmek adına, sadece iki oyuncunun olduğu ve duvardaki listede de 6 ve 7 sayılarının bulunduğu oyunu ele alalım. Esas sayılar bilinmemekte, biz onlara x ve y diyelim. İki oyuncunun da bildiği şey şu ki $x+y=6$ ya da $x+y=7$ olmak zorunda. Şimdi biraz geometriye girmemiz lazım. Bu iki koşuldan birini sağlayan (x, y) noktaları, düzlemde pozitif çeyrekte yer alan iki doğrunun koordinatlarını vermektedir.(Şekil 1a)

Eğer x veya y, 6'dan büyükse oyun ilk zilde biter çünkü öteki oyuncu 6 toplamının mümkün olmadığını hemen görecektir. Bu durumun gerçekleştiği (x, y) ikilileri Şekil 1b'de görülebilir. (Bu noktada biraz dikkat etmek lazım: üstü işaretlenmiş doğru parçalarının uç noktalarında bulunan (1, 6) ve (6, 1) noktaları iptal *edilmemiştir.*



Şekil 1(a)

İki doğru parçası, şapkalar üzerindeki muhtemel sayıları ifade eder.

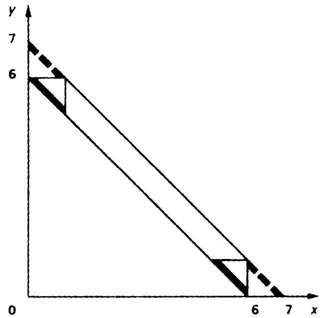


Şekil 1(b)

Eğer sayılar koyulaştırılmış olarak gösterilen parçalar üzerine düşerse, oyun ilk zilde biter.

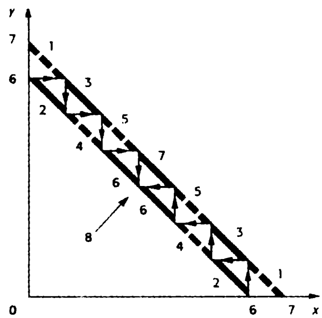
İptal edilen doğru parçaları, eğimli doğruların ortasına yakın olan birer sınır noktasından yoksundur.) Eğer iki oyuncu da ilk zilden sonra tepki vermezse bu ihtimallerin hepsi imkan dışı kalır. Bundan sonra, eğer sayılardan biri 1'den küçük ise ikinci zilde oyun biter. Neden? Öteki oyuncu üzerinde 1'den küçük sayı olan şapkayı görebilmektedir, kendi sayısının da 6 veya daha az olduğunun farkındadır; haliyle 7 toplamı mümkün değildir. İkinci

zilde oyunları biten ikililer Şekil 1c'de gösterilmektedir. Bu mantıksal çıkarımlar devam ettikçe, belirli bir zilden sonra oyunun bittiği (*x*,*y*) ikilileri, art arda köşegenlerle çizilen, biri soldan sağa aşağıya doğru, diğeri sağdan sola yukarıya doğru iki tane "merdiven" verir ki bu da Şekil 1d'de gösterilmiştir. Bu köşegen parçalar bütün imkanları hızlı bir şekilde tüketir. Aslında oyun da sekizinci zilde bitmek zorundadır. (Bahsetmiş bulunduğum "eksik sınır noktaları" sebebiyle (3,3) sayıları sekizinci bir zile ihtiyaç duyar. Diğer bütün durumlar yedi ya da daha az zil ile çözümlenir.)



Şekil 1(c)

Eğer sayılar bu doğru parçaları içine düşerse, oyun ikinci zilde biter.



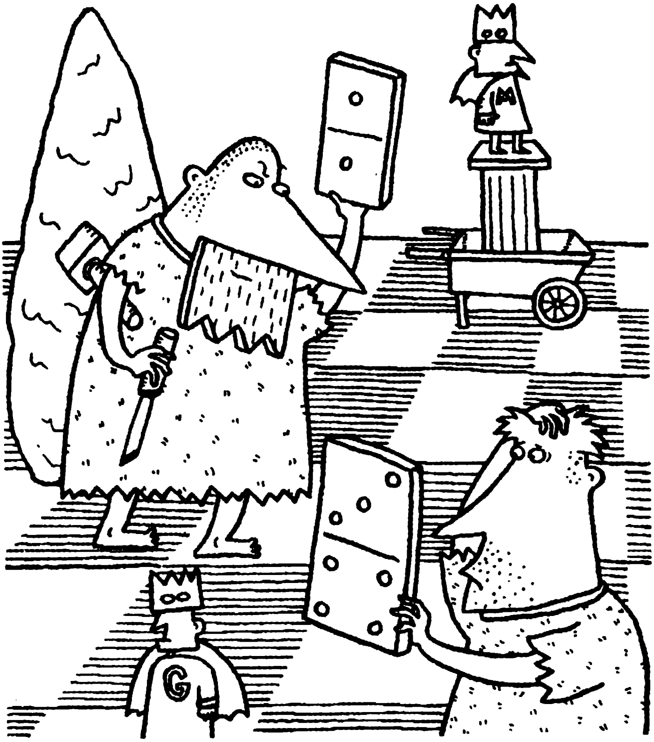
Şekil 1(d)

Doğrular arasındaki "merdivenlerde" ilerleyerek, herhangi bir ikili için oyunun ne kadar uzun süreceğini bulabiliriz (Gerekli zil sayısı, alakalı doğru parçaları üzerinde işaretlenmiştir; her doğru parçası merkeze yakın olan sınır noktasından yoksundur). Burada ihtiyaç duyulabilecek en büyük zil sayısı 8.

Bu akıl yürütmeyi kullanarak herhangi iki kişilik oyunu çözebiliriz, hatta en fazla kaç zil gerekeceğini hesaplamamız için bile müsaittir. Daha fazla oyuncu içeren ispat da oldukça kolay olmasına rağmen, matematiksel kültür gerektirir; Gale'in makalesinde bütün detaylar var. Kendi kendinizi sınamak açısından, her biri üzerinde 2 yazan şapka giymiş üç oyunculu oyunda neler olacağını çözebilirsiniz; liste daha önce bahsedildiği gibi 6,7,8. Sonuçta 14 zil boyunca hiçbir şey olmadığını ve 15. zilde bütün oyuncuların kendi sayılarını duyurduklarını göreceksiniz.

2

Domino Teorileri



Belirli bir işi kaç kez denerseniz deneyin başaramamanız, o işin imkansız olduğunu ispatlamaz. Sadece sizin nasıl yapılacağını bilmediğinizi gösterir. Bir şeyin imkansız olduğunu göstermek için, çözüme gitmesi mümkün bütün teşebbüslerin elenmesi gereklidir. Bunu başarmanın güzel yollarından biri, etrafından dolaşılamayacak bir engel -bir "sabit"- bulmaktan geçer. Böyle bir bağımsızı bazen, renkler ve sayıları kullanarak bulabiliriz.

İşler, taş-ustası Kayakeser Kayaezeroğlu'nun kalfasına belirttiği üzere, kesattı.

"Adeta ağzından bal damlıyor, bir daha söyle." dedi Pinek.

"İşler kesat, Pinek." Saygıdeğer Mermerciler Odası Başkanı'mız, söylenen her şeyi ciddiye alma eğilimindeydi. "Eğer yakın zamanda bir ihale alamazsak, dayım Kuzuatlar Kuzukoşturuduroğlu'nun sürekli bana kakalamaya çalıştığı koyun gütme işine girmek zorunda kalacağım."

Pinek, tahtadan yapmakta olduğu oyuncağı aheste aheste oymaya devam ederken, "Kiriz yüzünden Kaya'cığım. Hiç kimse alışveriş yapmıyor. Taş çember piyasası denizin kayalı dibine vurdu; bırak taş mezarı, taş *teker* bile satılmıyor." Geçen gün, Molok Molokoğlu öşür vergileri tekrar düştüğünden, kar tanrısı M'gaskil'i kış gelmeden teselli edebilmek için gerekli olan oğlak adaklarını bile ancak alabildiklerinden yakınıyormuş diye duydum.

Kaya biseplerini esnetirken heybetli burnunu kaşıdı. "Senden almanı istediğim *Rolling Stone*[1] *dergisini getirdin mi?*" Pinek, geniş ve yuvarlak bir kireç taşı parçasını ayağının dibine bırakıverdi. Sayın Kayaezeroğlu'da yerden alıp, üzerine kazınmış yazıtları okumaya daldı. "Küçük ilanlarda bir şeyler olabilir. Hımmmm...

1- İsmi İngilizceden, mecazı görmezden gelinerek, "yuvarlanıp giden taş" olarak çevrilebilecek dergi.

asistan newt[2] eğitmeni... Sislişehir haşere denetleme başkanı emekli olmuş... belirtilmeyen sebeplerle 7 bakireye ihtiyaç var, yolculuk etmeye elverişli olmalı... Hah! Batakköy pazaryerinin tamiratıyla ilgilenmek için davetiye!" Pinek, git de tam olarak ne istiyorlarmış bir öğren; ben de giydirme tokmaklarındaki tangalara göz atarım.

İki gün sonra Pinek döner.

"Eeee?"

"Batakköy'ün pazar yeri, tamı tamına altmış dört tane büyük taşla döşenmiş Kaya'cığım. Her biri 10 metre kare. Sekize sekizlik ızgara şeklinde düzenlenmiş. İlk döşenen taşlar çatlamaya başlamış, tümden hepsinin sökülüp yeniden yapılmasını istiyorlar."

"Şahane!"

"Dur daha, bazı şartları var. İlk olarak, bu sefer kare taşlarla döşenmesini istemiyorlar. Beldenin rahipleri, taşların çatlama sebebinin bu olduğu çıkarımına varmış."

"İyi sallamışlar! Bildiğin rahip işte, şekiller ve sayılar ve yumuşak entelektüel numerosofist[3] dertleri üzerine endişelenip dursunlar. Ama ben ne olduğunu çok iyi biliyorum. Tebeşirbiçer Tebşirezeroğlu oraları döşerken düşük kalite taş kullandı, sonrada içine su girip dondu."

"Rahipler, kare buz-iblisi Buzo'nun sembolü olduğu için taşlar çatladı diyor."

Kaya şaşkınlık içinde bakakaldı, "Öyle mi? Ben onu mağaragulyabanisi Gıcırdayandiş'in mührü sanıyordum. "

"O da var tabii," diye kabul etti Pinek. "Ama çok fazla sembol tercihi olmadığından böyle çakışmalar oluyor. Kare, popüler sayılır. Gıcırdayandiş, Buzo'yla paylaşıyor; iki haftada bir hafta içleri sembol onun."

"Haaa." Kaya birkaç saniye düşündü. "O zaman rahipler haklı olabilir, evet."

2- Bir tür semender.

3- Sofizm, antikçağ Yunan felsefesinde önemli bir düşünce akımı. Esasen bilgiyi öne çıkaran bilgicilik olsa da, sonraları küçümsenmeye başlanmış ve yanıltmak amacıyla yapılan yanlış usavurma anlamına kaydırılmıştır.

"Dondurucu havaların salı günü gelip gelmemesine göre değişir. Haklı ya da haksız, rahiplerle münakaşa olmaz. Yoksa adamın böbreklerini söküp alırlar. Kare taşa izin yok, domino istiyorlar."

Kayaezeroğlu sanki taşın altından çıkmış vıcık vıcık bir böcekmiş gibi ona baktı. "Kutsal Böcük adına, *domino* bir nedir Pinek?"

"Yan yana yapıştırılmış iki kare, Kaya'cığım"

"Peki, neden öyle demiyorlar? Neden ikiz takke istediklerini söylemiyorlar? Neden "domino" gibi şapşal bir isim kullanıyorlar?"

"Anladıysam ne olayım." dedi Pinek ve Kaya'nın onu hedef alarak savurduğu tekmeden ustalıkla kaçtı. Sonra bir anda yüzü asıldı. "Sorun çıkabilir Kaya'cığım. Ya dominolar oraya uymazsa."

"Tabii ki uyar! Bütün yapman gereken, iki karenin yerine bir domino koymak."

Pinek somurdu. "Evet ama o dediğin ancak toplam kare sayısı çiftse çalışır. Her domino *iki* karelik yer kaplıyor. Eğer işe tek bir sayıyla başlarsak, sonunda kaplanmamış bir kare kalacaktır."

Kaya iç geçirdi. "Pinek, sen 64 kare var demedin mi? O çift işte!"

"Öyle mi?"

"Taş tablalar yatay olarak dizildiyse, evet, bütün pazar yeri çift olmalı."

"Aaaaa. Tabii." Dalgın dalgın burnunu kaşıdı. "Sanırım Yecüc ve Mecüc heykelleri olduğunu daha önce belirtmem gerekirdi."

Kayaezeroğlu öfkeli bir biçimde ayağa fırladı. "Heykel mi? *Ne* heykeli?"

"Daha önce bahsetmeyi unuttuğum heykeller işte. İlk taş plaka çatlayınca, rahipler sorunu, üzerine Yecüc heykeli dikerek kapamaya çalışmışlar. Başka bir plaka daha çatlayınca, onu da takımı tamamlamak amacıyla, Mecüc heykeliyle kapamışlar. Her ikisinin de taban şekli ve büyüklüğü taş tabletlerinkiyle aynı. Yani artık 64 tane kare yok, şey tane kare var, eeee.... "

"Altmış iki."

"Peki, tamam. Aaaaaa, bu bir çift sayı mı?"

Kaya, ellerini kullanarak saymaya başladı ama çok ilerleyemeden parmaklarının sonuna geldi. "Dürüst olmak gerekirse Pinek, hiç bir fikrim yok."

"İsim işaretlerimizi herhangi bir yasal bağlayıcı belgeye kazımadan önce emin olsan iyi olur, Kaya'cığım. Cezai şartlar var." 20 dakika boyunca Kayaezeroğlu'nun, yerel devlet sözleşmelerinde cezai şartları bulan köpoğluna küfretmesini bekledi. Beklerken de 73 yeni küfür öğrendi. "Yeni taş-tabletlerin uymaması durumunda, sülfür madenlerinde on yıl..." diye, açıklamak amacıyla ekleyince. Küfürler de yinelendi. Sonunda Kayaezeroğlu nefes almak için durunca, Pinek bu şansı elden kaçırmadı. "Kayacığım, bunu kendi başımıza çözemeyeceğiz. Bize bir bilen lazım."

"Aklında birisi mi var?"

"Hopfışıp!"

"Tanrılar seni iblislerden korusun, çok yaşa."

"Yoooo ben hapşırmadım, Allah'ın andavalı! Hopfışıp İstehopşıpçıkızı!"

"Al işte yine yaptı... haaaa, o mu? Senin Ölü Kedi Bataklığı'nda yaşayan, numerosofist arkadaşın." Pinek kafasıyla onayladı. "İyi düşünmüşsün kalfa: bize kesinlikle bir bilen lazım. Bu işler bizim boyumuzu aştı."

Hopfışıp İstehopşıpçıkızı, onlar evine vardığı sırada elbisesinin kenarlarını köstebek kuyruğu dikerek süslüyordu. "Aferin size, iyi ki bana geldiniz. Bu işin, avam tabakasından olanların anlayamayacağı kadar derin tarafları var, kendinizi ciddi bir belaya bulaştırabilirdiniz. Bir kere, 62 çift bir sayı olsa da..." Kaya'yla Pinek ilk kim bunun doğru olduğunu ve ilk kim yanlış olduğunu iddia etti diye tartışırlarken biraz bekledi –"kare sayısının çift olması yeterli değil."

"Değil mi?"

"Hayır. Daha derin bir eşleme sorunu var. Bu eski ve çetin bir numerosofist cevizidir. Örneğin, meydanın iki karşı köşesinden birer kare kaldırılmış olsun (Şekil 2a). Geriye kalan 62 kareyi dominolarla kapamak mümkün müdür?"

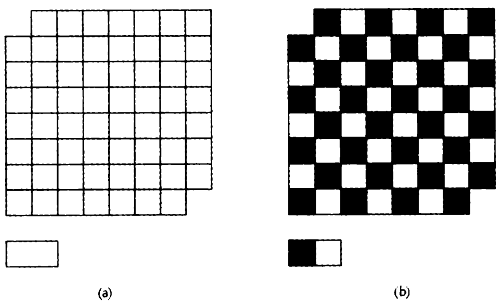
"Ne bileyim," dedi Kaya.

"Olması lazım," dedi Pinek. "Farklı düzenlemeler denemek için birçok boş alan var, sonuçta da sadece bir tanesi kapanmadan kalamaz."

"Doğru. Ama iki tanesi kapanmadan kalabilir." İstehopşıpçıkızı kulubesinin bir köşesini karıştırdı ve 64 kareye ızgaralanmış bir tahta ile her biri karelerden ikisini kapayacak kadar büyük tahta dörtgenlerle dolu bir kutu buldu. Karşı iki köşeye birer çakıl taşı koydu. "Deneyin bakalım."

Pinek karelerle uğraşmaya koyuldu. Kayaezeroğlu da İstehopşıpçıkızı'nın yanına kaydı ve tahta ile dörtgenlerin nereden çıktığını sordu. "Bir tür oyun fikri olarak başladılar," dedi. "Tahta, bir nehri ifade ediyor ve küçük dikdörtgenleri kullanarak üzerinden geçen yay gibi bir şey kurmaya çalışıyorsun, tabii çökmeyecek. İsmini "köprü" koyacaktım."

"Öyle bir isimle asla tutmazdı," dedi Kaya.



Şekil 2

(a) Karşı iki köşesi kaldırılmış, 8x8'lik bir ızgara. 31 domino ile kaplanabilir mi?

(b) Izgara, dama gibi renklendirilirse, 32 siyah kare ve 30 beyaz kare olduğu görülür. Ama her domino bir siyah bir de beyaz kare kaplamak zorunda. Haliyle iki tane siyah kare kaplanmadan kalacak.

Pinek öfkeyle tahtaya vurdu. "Bir türlü uymuyor! Bir sürü kez denedim ama olmuyor."

Hopfışıp İstehopşıpçıkızı gülümsedi "Ve asla olmayacak Pinek. Dikkatini karelerin üzerindeki farklı renklere çekmek isterim (Şekil 2b)."

"Güzel bir desen olmuş."

"Evet. Siyah kareleri kömür, beyaz kareleri de arorat özütü içerisine yatırılmış güzelavrat otuyla yaptım."

"Neden tebeşir kullanmadın?"

"Bu çok iyi bir fikir Pinek! Tebeşir ile yazabileceğim hiç aklıma gelmemişti. Yanmış çubuk yerine bir taşla yazdığımızı düşünsene! Her neyse, eğer tahtaya bir domino yerleştirmeyi denersen, her zaman bir siyah bir de beyaz kare kaplamak zorunda olduğunu göreceksin çünkü yan yana iki siyah kare ve aynı şekilde beyaz kare yoktur. Pinek: iki köşeyi saymazsak kaç beyaz kare var?"

Pinek istemeye istemeye saydı. "otuz"

"Peki. Ve kaç tane siyah var?"

"Şey... Otuz iki."

"Aynen öyle. Her domino ikisinden de birer tane kaplamak zorunda olduğundan, en az iki tane siyah kare kaplanmadan kalacaktır. Bir boş kare kalamaz demekte haklıydın. Ama bu iki tanesinin boşta kalmayacağı manasına gelmez! Bu, dominolar için geçerli genel bir eşleşme ilkesidir: çift sayıda kare olması gerektiği gibi, siyah ve beyaz karelerin sayısı da eşit olmalıdır."

"Bu," diye ilan etti Kayaezeroğlu, "kesinlikle dahiyane Hopfışıp. Ancak," diye ekledi, "Batakköy pazar yeri taşlarının *hepsi aynı renk.*" Aşağılayıcı bir bakış attıktan sonra. "Tipik teorici aklı, hiiiiiç pratik işlere çalışmaz."

"Ama" dedi İstehopşıpçıkızı "karelerin renklendirilmiş olduğunu *hayal edebilirsin,* aynı mantık böylece buraya da uygulanabilir." Kayaezeroğlu birkaç dakika bunun üzerine düşündü ve sonra da mosmor kesildi. Utancını belli etmemek için Pinek'i Batakköy'e, Yecüc ve Mecüc heykellerinin, hayali bir dama renklendirilmesi *hayal edildiğinde* aynı renk karelere gelmediklerinden emin olmak için yolladı.

Kaya, Hopfışıp İstehopşıpçıkızı'na ve yaşlı babasına bütün kış yetecek kadar batakısırganı çorbası yapması için yardım ederken iki gün daha geçti. Sonra Pinek geliverdi.

"Batsın bu iş, amma da can sıktı. Yolda kendi kendime eğlen-

mek için bir şiir yazdım. Dinlemek ister misin, İstehopşıpçıkızı? Ormandaki korkunç bir yaratık hakkında. "

"Oku bakalım."

Pinek derin bir nefes aldı ve cılız göğsünü kabartarak, "Tavşan, tavşan! Ormanın karanlığında ateş gibi yanan! Hangi ölümsüz kem göz ya da eller..."

"Seni tavşan yahnisine çevirirler," dedi kaya. "Boş işleri bırak da heykellerin konumlarından haber ver Pinek."

"Bu iş tamam, Kayacığım! Heykellerden biri beyaz, öteki de siyah karede!"

"Hangisi?"

"Ne?"

"Yecüc siyahta mı, beyazda mı?"

"Bilemiyorum, Kayacığım..."

"Bak, bu önemli olabilir Pinek. Yecüc rahipleri beyaz pelerin giyer, Mecüc rahipleri ise..."

"Ha. Bak şimdi Kaya, bunlar zaten hayali renklerdi, her zaman öteki türlüsünü..."

Kaya aniden kafasını sallamaya başladı. "O kadar kolay değil, Pinek. Şimdi aklıma geldi, Mecüc rahipleri siyah şapka giyer, Yecüc rahipleri ise..."

"Böcük aşkına!" diye bağırdı İstehopşıpçıkızı. "Kimin *umurunda*?" Pinek'i omzundan yakaladı. "Bu iki heykelin *tam olarak* nerede olduğunu hatırlama ihtimalin var mı?"

"Yok."

"Hay, aksi."

"Fark eder mi?" diye sordu Kaya.

"Emin değilim, edebilir. Pinek'i geri mi yollasak –yok, o da günler sürer."

"*İki gün,*" dedi Pinek. "Ayrıca, Batakköy pazar yerine bata çıka gitmekten de bıktım."

İstehopşıpçıkızı derin düşüncelere daldı ve "Ne söyleyeceğim, belki de fark etmez." dedi. "Ama emin olmak için çok fazla olasılığı denemek lazım. Babama danışmanın zamanı geldi galiba."

"Babası üfürükçüdür." diyen Pinek, Kaya'ya hatırlattı. "Ruhlarla iletişim kurar falan işte." Kaya, işin içine üfürükçülük girince cebindeki gümüşlerin hepsi gittiğinden, şüpheci bir yaklaşım içerisindeydi ama İstehopşıpçıkızı bataklığın içine fırlayıverip babasını bulmaya gitti. Çok geçmeden İstehopşıpçıkızı'yla beraber yaşlı adam, Arzuyakalar İyisallaroğlu geldi. Kayaezeroğlu'nun cüzdanındaki gümüşlerle, uygun bir şekilde motive edildikten sonra cebindeki tarot kartlarını bulup çıkardı ve kehanete başladı.

"Bostanın.... içinde. Lahananın... üstünde. Boynuzu var!"

"Danalar girmiş bostana." diye önerdi, Kayaezeroğlu.

"Evet ama dana ters duruyor ki bu sarhoşluk demek, aşağıda da sırıtan tazı var..."

"Ki bu, bunların bir parodi olduğunu gösterir."

"Eğlenceyi vurgular. Diğer kartlar ... Saman Çatalı..."

"Çatal ve Çatal."

"Hayır... iç içe geçmiş çatallar" Yaşlı adam kafasını salladı. "Bu çok garip destede çatal yoktu... Ahh! Bir isim... Gelecekten bir ruh... "Büyük Mavi[4]"'nin bir öğrencisi, Ralph... Ralph..."

"İşte bu o tazı. Hep "Ralph! Ralph!" diye bağırırlar. Ama buna havlamak denir sırıtmak değil."

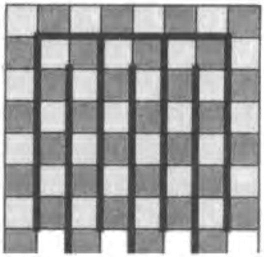
"Hayır, bu bir isim... Ralph... şey... Grimori? Grimory? Hayır –Ralph Gomory, gelecekteki büyük bir numerosofist... üç başlı çatal üstüne dört başlı çatal, güç ve güzelliğin mührü. Çabuk, Kömürü ver!" Yaşlı adam tahtaya düz çizgiler çekti (Şekil 3). Sonra da transtan çıktı.

Kayaezeroğlu istemeye istemeye bir gümüş parçası daha verdi. "Sanırım babanın henge[5]'inden bir kaç taş eksik, İstehopşıpçıkızı."

İstehopşıpçıkızı kömür çizgileri koklayıp, inceledi. "Tam emin değilim, Kayakeser Kayaezeroğlu. Çatalları duvar olarak düşünürsek, dominolar ikisinin arasına çizgisel olarak, sonsuz bir halka oluşturacak şekilde yerleştirilebilir. Eğer karelerden ikisi çıkarılırsa, halka iki parçaya ayrılır. Ve çıkarılan kareler ar-

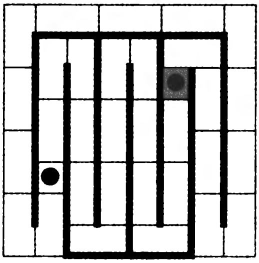
4- "Big Blue", IBM firmasının takma ismi.

5- Stonehenge'den.



Şekil 3

Gomory'nin mührü, ardışık dominolarla doldurulabilecek bir zincir oluşturur.



Şekil 4

Farklı renkte iki kare çıkarılınca dominoların sıralanışı.

dışıksa, muhtemelen bir şerit olarak ayrılacaktır. Eğer heykeller farklı renkte kareler üzerindeyse, her parça çift sayıda kare içerecek ve haliyle dominolarla kaplanabilecektir. Bu diyagram, heykeller hangi iki kare üzerinde olursa olsun, geriye kalan alanın dominolarla kaplanabilmesi için bu karelerin renklerinin farklı olmasının, gerekli ve yeterli olduğunu ispatlıyor. Gerçekten de herhangi bir durumda istenen sonuca nasıl varılacağını gösteren, yapıcı bir ispat bu." (Şekil 4)

Kaya etkilenmişti. "İstehopşıpçıkızı, şüpheci davranışlarımdan dolayı babandan özür dilerim. Olağanüstü bir gerçeği gün yüzüne çıkardı." Yaşlı adam "kuru laf", "karın" ve "doymak" hakkında bir şeyler homurdanınca, daha fazla utanmak istemeyen Kaya, bir gümüş parçası daha verdi. "Pinek! Çabuk benim yazı çivimi ve en kaliteli taşımızı getir! Şöyle başlık atalım, **BATAKKÖY PAZAR YERİ RENOVASYON SORUMLUSU, KAYAKESER KAYAEZEROĞLU TAŞ RENOVASYONCU, BULANIK ÇAMUR**"

"Peki," dedi Pinek. "Hay aksi, iki yeni heykel hakkında hiçbir şey söylemedim değil mi?"

Kaya dik dik baktı. "İki... yeni..."

"Demacüc ve Volücüc. Rahipler bir kaç çatlağı daha kapamaya karar vermişler de."

"Aman ya –Böcüküm," dedi Kaya.

"Farklı renkte karelerdeler, " diyerek yardımcı oldu Pinek. "İkisi siyah karede, ikisi de beyaz."

"Şans eseri, tam olarak hangi karelerde oldukl... yok, tabii ki hatırlamıyorsun. İstehopşıpçıkızı: Gomory'nin mührü, her rekn-ten ikişer tane olacak şekilde, 4 kare çıkarıldığında da çalışır mı?"

Hopfışıp İstehopşıpçıkızı kaşlarını çattı. "Eğer dominoları yer-leştirdiğimiz halka üzerindeki çizgisel ilerleyiş sırasında çıkartılan karelerin rengi, bir siyah bir beyaz diye değişmeli olarak giderse olur." dedi. "Ama siyahın ardından yine siyah gelirse, bunların arasında kalan kare sayısı tek olur ve ispat bozulur."

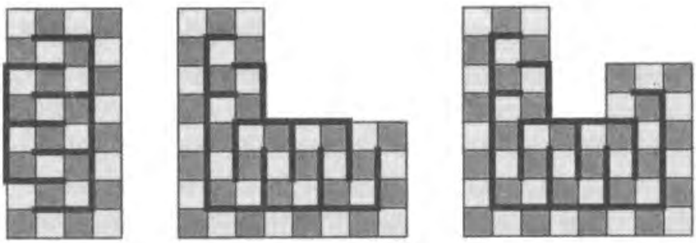
"Peki, böyle bir şey olabilir mi?"

"Olmaması için bir sebep göremiyorum. Biraz kafa karıştırıcı."

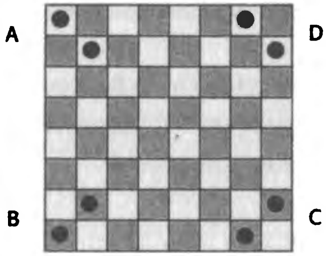
"İşte o konuda haklısın." Uzun bir sessizliğin ardından Kaya bir şeyler söylemeye başlamıştı ki İstehopşıpçıkızı sözünü kesti.

"Dur, sessiz ol! Aklıma bir fikir geldi... Evet, tabi ya. Tahtayı, her parça iki renkten de sadece bir tane eksik kare içerecek şekilde ikiye ayır. Bu ikiye bölme işini öyle yap ki hangi biçimde olursa olsun, aynı Gomory'nin mühründe olduğu gibi sonsuz bir halka elde edelim. Sonra da aynı argümanı her iki parçanın da kaplana-bileceğini ispatlamak için kullan."

"Böyle farklı biçimlerde mühürlenebilen parçalar var mı?" Bir an düşündükten sonra. "Birçok, örnek olarak iki üç tanesini çi-zeyim. (Bakınız Şekil 5)"

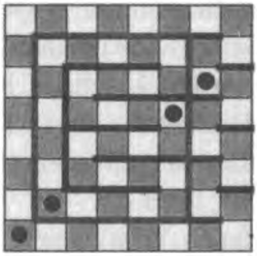


Şekil 5 Bazı mühürlenebilir bölgeler.



Şekil 6

Dört tane sorunsal köşe düzenlemesi. C ve D köşedeki karenin dominolarla kaplanmasını engelliyor, A ile B ise herhangi bir sorun çıkarmaz.



Şekil 7

Şekil 6'daki A durumunun çözümü üzerine bir örnek. Mühürlenmiş bölgelerin her biri iki renk içinde, tam olarak bir tane çıkartılmış kare içerir.

"Hmmmmm... Bütün detaylara giremeyeceğim ama tahtanın istediğimiz şekilde ayrılamayacağı tek durumun, çıkarılmış iki beyaz ya da iki siyah karenin aynı köşeye yerleştirildiği durum olduğundan oldukça eminim (Şekil 6). Düzenlemelerden birinde köşedeki kare tek başına kalacağından, kaplamanın imkansızlığı çok bariz. Diğer durumdaysa tahta yine, her parçanın iki renk için de çıkarılmış birer kare içerdiği ve Gomory mührünün uygulanabileceği iki bölgeye ayrılabilir (Şekil 7). Bölgelerden birinin ortasında bir delik olmak zorunda olsa da bu argümanımızı etkilemez. İnanıyorum ki dikkatli bir inceleme sonucunda tahta, Şekil 6'daki gibi sorunsal bir düzenlemenin renklerden biri ya da öteki için görülmediği her durumda, dominolar ile kaplanabilecektir." Omzunu silkip "Gomory'ninki kadar zarif bir ispat olmadı maalesef. Belki gelecekte bir başka numerosofist daha iyisini yapar."

"Her neyse," dedi Kaya, "bizim işler yolunda gibi." Ayağa fırladı. "Şimdi bize, gidip heykellerin köşedeki bir kareyi izole etmediğini kontrol edecek birisi lazım. İşimizi garantiye almak için, Pinek, bu sefer heykellerin konumunu gösteren bir haritada yapıver ki tam olarak ne yapmamız gerekeceğini bilelim. Böylece İstehopşıpçıkızı'nın tahta parçalarını kullanarak, ihaleye teklif vermeden *önce* çözümü bulabiliriz."

Pinek somurdu. "Niye ben gidiyorum? Zaten iki kere gittim ve her seferinde iki günlük..."

"*Sen*, Pinek, kalfasın. *Ben* ise Mermerciler Odası Başkanıyım."

"Ha tamam o zaman. Ben yola koyulayım." Yolda yemek üzere birkaç keçi eti şekeri ödünç aldı ve kapıya yöneldi.

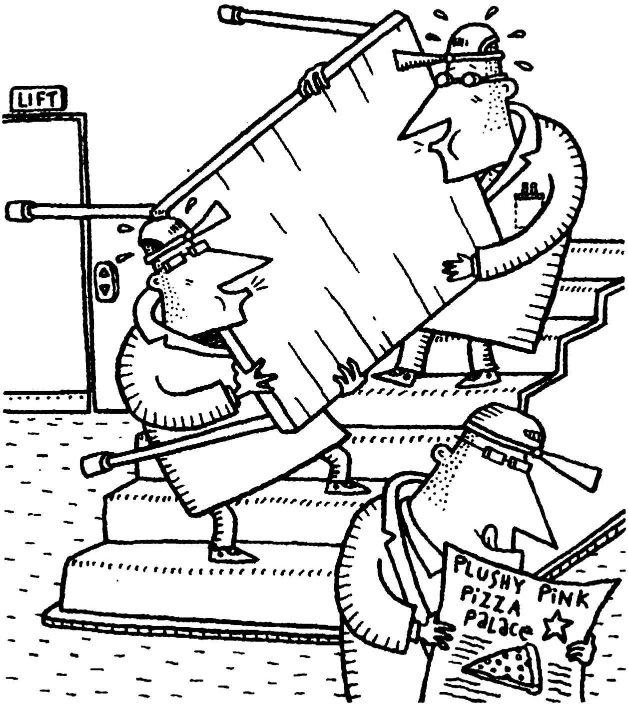
"Ha, Pinek?"

"Buyur, Kaya'cığım"

"Rahipler *başka* heykel dikmeden geri dönebilirsen iyi olur."

3

Masanın Öteki Ucu



Mobilyaların yerini düzenlemek gerektiğinde, boş alan da kısıtlıysa, eşyaların hareket ettirilme sırası büyük önem kazanabilir. Peki, hangi hareketleri hangi sırayla uygulamanız gerektiğini nasıl bulursunuz? Haritalar, bir şehirde ya da labirentte yolunuzu bulmak için çok yardımcı olur. Haliyle ihtiyacınız olan şey bulmacanın, yani mantıksal labirentin kavramsal haritasıdır.

Ense Kulesi'nin altmış yedinci katında, Çek-Götür-Yat Nakliyat'ın iki çalışanı, her biri normalde yangından kaçış için ayrılmış daracık merdivenlerden taşınmış dokuz adet masif meşe masadan sonuncusuyla debelleşmekteydi. Aslında niyetleri asansörü kullanmaktı ama Ense Kulelerinin sahibi Sakar K. Ense, asansör halatlarının masaların ağırlığına dayanamamasından korkuyordu.

Masayı, depo odasına diğer sekiz masanın yanına sürüklediler. Kapı arkalarından kapanıverdi.

"Bitti," dedi Cem, nefes nefese. "Son bir kontrol ve sonra Pes Pembe Park Pizzacısında pizzalar benden. İki adet jumbo boy kare masa, altı adet çok iri dikdörtgen masa ve bir adet en büyüğünden uzunboyun."

Her seferinde listedeki maddelerin yanına tik atarak, "İki adet bire birlik, altı adet ikiye birlik ve bir adet ikiye ikilik. Tamam." dedi Rahmi. Kalemiyle kağıt üzerinde karalamalar yaptı. Kafasını yukarıya kaldırdı. "Ne diycem, burası biraz tıkış pıkış mı olmuş?"

"Komple dolu. Durduğumuz yer hariç duvardan duvara masa."

"İyi sıkıştırmışız da ne yapacaklar bu kadar masayı?"

"Zemin kattaki balo odasının dekorasyonu bitinceye kadar bu odayı depo olarak kullanıyorlar sanırım. Söylentilere göre Rasputina Ense, turkuaz değil de limon yeşili olsun istiyormuş."

Rahmi homurdandı. "Bütün bunları taa buralara kadar çıkardık, sonra da geri aşağıya indirmemizi mi isteyecekler?"

"He ya. Hem de haftaya. İş iştir Rahmi, hor görme. Bunu fiziksel kuvvet ve zihinsel karakterin bir testi, bir sınav olarak düşün. Ben sınanmaya dayanamam, ya sen?"

"Çok sağ ol da *herhangi bir* sınava dayanacak fiziksel kuvvet ve zihinsel karaktere sahibim ben. Su gideri kazma işine girerim daha iyi, en azından yere yakın."

"Yere yakın demişken, Pes Pembe Park Pizzacısı da öyle."

"Doğru dedin. Hadi gidelim. Hoppala!"

"Ne oldu, niye hoppala?"

"Kapı kendi kendine kitlenmiş herhalde."

Cem'in yüzü dona kaldı. Aklını başına toplayıp, "Paniklemenin manası yok, buralarda bir yerde acil durum telefonu vardır." Dedi.

"Biliyorum," dedi Rahmi. "Şurada, üzerinde "Acil Durum Telefonu" yazan küçük kapının arkasında."

"Şahane."

"Ki o kapı da masif meşe masanın arkasında kalmış."

"O kadar da şahane değilmiş. Masayı itmemiz lazım."

"Çok sıkı istiflemişiz," diye gözlemledi Rahmi. "Kolay olmayacak bu iş."

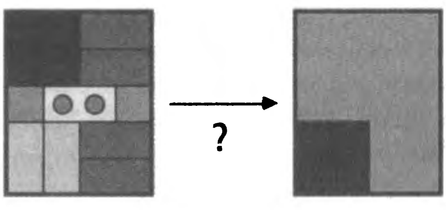
"Bir şekilde sağa sola yığsak, biraz boş alan yaratamaz mıyız?"

"Tavan çok alçak, hayatta olmaz."

Yarım saat uğraşıp hiçbir şey başaramayınca durdular. "Cem, gücümüz kuvvetimiz bitmeden önce ne yapacağımızı düşünüp öyle davranmamız lazım. Uzunboyunlu masayı şuradaki köşeye taşıyabilirsek (Şekil 8), bence bu iş çözülür. Diğer masaları, birer birer boş kalan alana itebilir, o masaların yerlerine de başka masalar itebiliriz."

"Sıkışıp kalmayalım?"

"Yok, masaların altından kaçabiliriz." dedi Rahmi.



Şekil 8

Büyük siyah kareyi sol alttaki köşeye alacak şekilde masaları kaydırabilir misiniz? İki halka ile gösterilmiş Cem ile Rahmi, mevcut tek boş alanda ayakta durmaktadırlar.

Cem eğilip masanın altına baktı. "Haklısın, buraya sığabiliriz." Düşünürken kafasını kaşıdı. "Biliyor musun," dedi, "Ben çocukken "Babaların Yapbozu" diye bir oyunum vardı. Dikdörtgen ve kare blokları sağa sola kaydırıp, Babanın piyanoyu odadan çıkarmasını sağlamaya çalışıyordun. Bu duruma ne kadar da çok benziyormuş." Bir an dona kaldı. "Aslında şüphe uyandıracak kadar benziyormuş. Her neyse, biraz zamanımı almıştı ama sonunda nasıl çözeceğimi bulmuştum."

"Şahane! Hatırlayabilir misin?"

"Tabii canım. İstediğin yere gelinceye kadar blokları sağa sola kaydırıyorsun işte."

Rahmi yüzünü ekşitti "Bize biraz daha belirli bir şey lazım galiba, Cem."

Cem omuzlarını silkti, altıncı yaş doğum gününde hediye olarak aldığı bir bulmacanın nasıl çözüldüğünü hatırlamadı diye üzülecek hali yoktu ya. "Solo test olsa, şıp diye çözerdim ama..." Diyerek insanüstü bir hafızaya sahip olduğunu ispatlamaya çalıştı.

"Eminim, hep geri zekalı çıkıyordun. Bizi de buraya kilitledin. Çok sağ ol Cem."

"Tartışma çıkarıp, ağlamanın kimseye faydası yok. Masalardan bir ikisini sağa sola oynatalım da ne olacak bakarız."

Uzunboyunlu masayı başarılı bir şekilde yukarı sol köşeden sağ duvarın ortasına (Şekil 9) kaydırabildikleri yarım saat daha geçti. İlerleme kaydetmiş olsalar da Cem'in vurguladığı üzere, bu ilerleme hangi yöndeydi?

"Bize lazım olan şey," dedi Rahmi derin derin, "bir harita."

"Rahmi, masaların nerede olduğunu zaten *görebiliyoruz.*"

"*Odanın* haritası değil."

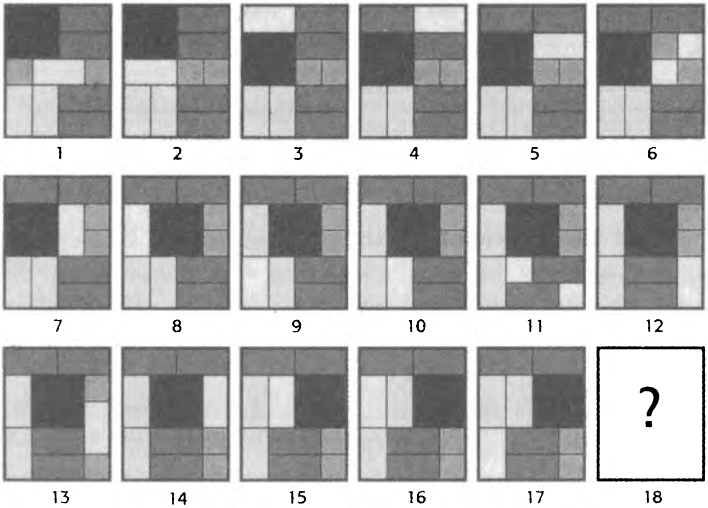
"Ya ne?"

"*Bulmacanın* haritası."

Cem dik dik baktı. "Kafayı mı yedin? Bulmacaların haritası olmaz."

"Seni bozmaktan hoşlanmam eski dostum, yoo, düşününce fark ettim ki seni bozmaktan hoşlanıyorum ama her neyse, bul-

macaların haritası olur. Harita derken, kavramsal harita. Kafanda kurduğun hayali haritalar. Bulmacadaki bütün pozisyonları sıralayan ve birinden ötekine nasıl gideceğini anlatan haritalar. Hangi hareketleri hangi sırayla yapman gerektiğini söyleyen zihinsel tablolar."



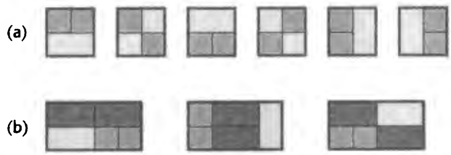
Şekil 9 Muhtemel hareketler dizisi. Yapılacak çok iş var.

Cem kafasıyla onayladı. Tabii şunun dışında..."Baya karışık bir harita olacak, Rahmi. Çok fazla pozisyon ve çok fazla hareket var."

"Doğru. O yüzden bu sayıları azaltmanın bir yolunu bulmamız lazım. Sorunu daha küçük, basitgenmiş parçalara ayırmalıyız. Sonrada bu parçaları bir şekilde birleştirmeye çalışırız."

"Bir kere, kare bir odada sadece en küçüğünden iki tane masa olsaydı, bunları oldukça özgür bir şekilde hareket ettirebilirdik," dedi Cem. (Bakınız Şekil 10a.)

"Evet, evet, işte fikir bu. İyi belirlenmiş sınırlar içerisinde oluşturulmuş bir tür alt-bulmaca yaratmak." (Şekil 9'daki 5-6-7 pozisyonları tamda böyle bir alt-bulmacayı kullanır.) Durdu ve düşündü. "Hmmm. Bir tane daha var ama biraz daha karışık; dikdörtgen bir alan içerisinde iki dikdörtgen iki de kare masa, geriye kalan alan da boş olsun. " (Bakınız Şekil 10b.)



Şekil 10

Bazı kullanışlı manevralar. Her bulmacada masalar belirlenmiş sınırların dışına çıkmadan istenildiği şekilde düzenlenebilir.

"Haliyle, aralarındaki bu alt-bulmacalardaki masaların yerini değiştirmek olan pozisyonların, aslında aynı olduğunu farz edebiliriz." dedi Cem. "Bu muhtemel pozisyonlar listesini baya kısaltacaktır."

"Evet. Ve bir şey daha var. Eğer geldiğin yere geri dönmek istemiyorsan, masaları oynatmanın bazen sadece bir tek yolu vardır." (Şekil 9'daki 3-4-5 pozisyonları ya da daha uzun 7-17 pozisyonları örnek olarak alınabilir.)

"Yani, nereden başlayıp, nereye gitmek istediğini bildiğin sürece, bu şekil seriler haritadan çıkarılabilir mi?"

"Aynen öyle. Bana şu kağıt kalemi ver bakayım." Kısa bir süre sonra Cem ile Rahmi, mantıksal labirent haritasının bir parçasına bakıyorlardı (Şekil 11).

"Başlangıç ve bitiş pozisyonlarını işaretledim," dedi Rahmi. "Şu halde anahtar masaları yerleştirmek için çeşitli yollar var ki bunları da A, B, C, D, E, F olarak işaretledim."

"Altı taneden daha fazla olmasını beklerdim."

"Aslında var. Bu sadece haritanın bir *parçası*. Ama bulmacayı çözmeye yeter de artar bile. Şimdi sessiz ol ve dinle. Çizgiler mecburi hareket dizilerini ifade ediyor –şöyle ki, eğer nereden başlayıp nereye gitmek istediğini biliyorsan arada kalan hareketler oldukça açık zira yapabileceğin altı üstü bir tek hareket var, tamam mı?"

"Tamam, gördüm. Bulmacalarla bir süre uğraştıktan sonra böyle şeyleri illa ki fark edersin."

"Ha şunu bileydin. Şimdi, çözülmesi gereken alt-bulmacaları içeren dikdörtgen bölgeleri gölgelendirdim. Bu alt-bulmacanın *hangisi* olduğunu göstermek için de diktörgenin içinde olması gereken başlangıç ve bitiş pozisyonlarını, uygun çizgilerin uçlarına yerleştirdim."



Şekil 11

Bulmacanın kısmi haritası. Büyük diyagramlar, anahtar masaların yerleşimini gösteriyor. Köşelere yerleştirilen bölgeler, Şekil 10'daki kullanışlı manevralar kullanılarak çözülmesi gereken alt-bulmacaları gösteriyor. Çizgiler, nereye gitmek istediğini bildiğin sürece yapmanız "mecburi", bazen de uzun olan hareketleri ifade ediyor. Örneğin Başlangıçtan C'ye giden çizgi Şekil 9'da gösterilmiş 17 hamlelik zincirdir. Küçük diyagramlar da alt-bulmacaların başlangıç ve bitiş sırasında bulunmaları gereken pozisyonları gösteriyor. Bu haritayı rehber olarak kullanarak bulmacayı nispeten kolay bir şekilde çözebilirsiniz.

Cem, ağzı açık kala kaldı. "Kusura bakma, ben pek anlayamadım."

"Peki, farz et ki C konumundan E konumuna nasıl geçeceğini çıkarmak istiyorsun. Onları birleştiren dikey çizgiye bak.

Çizginin yanında iki küçük diyagram var. C'deki çapraz taranmış alanı yukarıdaki diyagram ve E'deki çapraz taranmış alanı da aşağıdaki diyagram gibi yaparsan, başlangıç ve bitiş pozisyonlarını elde etmiş olursun. Arada kalan hareketler "zoraki" olduğundan, uygulanmaları pek uzun sürmez. Eğer bulmacanın kağıtla bir kopyasını yaparsan, bu kopya üzerinde hareketlerle kontrol edebilirsin."

"ÇIKMAZ SOKAK ne demek?"

"*Sence* ne demek olabilir! Şimdi, harita bize ne söylüyor?"

"Şeylerin nerede olduğunu ve birinden ötekine nasıl geçebileceğimizi. Şey, aslında, bunların ipuçlarını."

"Daha fazlasını da söyler. Bize bulmacayı çözmenin bir yolunun, BAŞLANGIÇ-C-A-B-BİTİŞ rotasını takip etmek olduğunu gösterir. İlişkili çizgilerin yanındaki küçük diyagramları gölgelendirilmiş alanların çözümü için kullanıverip, mecburi hareket dizilerini de takip edersek, bu iş çözülecek."

Cem'in yüzü hayranlık içinde nurlandı. "BAŞLANGIÇ-C-D-B-BİTİŞ şeklinde de gidilebilir mi?"

"Tabii. Hatta BAŞLANGIÇ-C-E-F-D-B-BİTİŞ bile olur ama yolu gereğinden fazla uzatmış oluruz."

Cem kendini kaptırmaya başlamıştı. "Ya da BAŞLANGIÇ-C-D-F-E-C-D-B-A-B-D-C-E-"

Rahmi, arkadaşı nefessizlikten bayılmadan önce müdahale etti. "Evet. Ama bu *daha bile* gereksiz uzun bir rota olur."

"Bana en kısası yeter."

"Bana da uyar. Hadi şu masaları itelim!"

Tekniği tam olarak kavramaları biraz sürdü ama bir kere kaptıktan sonra uzunboyunlu masayı sol aşağıdaki köşeye çekmeleri kolay oldu. Bundan sonra da Rahmi acil durum telefonuna ulaştı ve lobideki kapı görevlisiyle iletişim kurmayı başardı. Yardım geldiğinde, masaların yeni düzeninin kapıyı engellediği ve bu yüzden de kapının açılamayacağı anlaşıldı ama Cem ile Rahmi, Baba'nın bilmecesini avuçlarının içi gibi öğrenmişlerdi.

Gece yarısını çok geçmemişti ki özgürlüklerine kavuştular.

Böyle bir tecrübe sonucu biraz şaşkına dönmüşlerdi, bir taksi

çevirip, 24 saat açık Pes Pembe Park Pizzacısının yoluna koyuldular. İlk önce öğlen yemeklerini telafi edecek sonrada akşam yemeklerini yiyeceklerdi.

"Biliyor musun," dedi Cem "çok da zor olmadı."

"Haritayı bir kere çıkardıktan sonra zor olmadı. Ama şanslıydık, kolay bir haritaydı."

"Evet. Ama işi kolaylaştırmak için bazı yöntemler kullandın da ondan."

Rahmi çenesini kaşıdı ve zımpara gibi uzamış sakallarını buldu. "Yöntemlerin yardımı olur ama haritaları, aklına gelebilecek her yöntemi kullandığında bile çok karışık olacak blok kaydırma bulmacaları var."

"Mesela?"

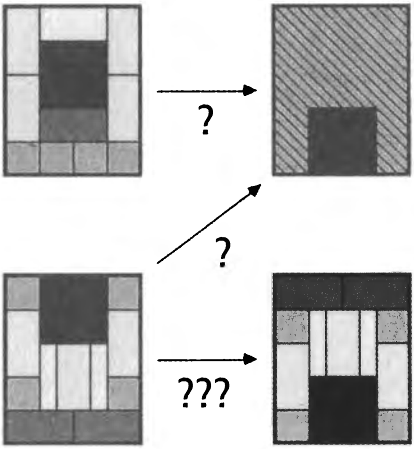
"Şey, Eşek bulmacası[1] dedikleri, muhtemelen on dokuzuncu yüzyıldan kalma ve neredeyse kesin olarak Fransız asıllı olan bir tane var. O baya bir zor. 1980'lerde icat edilmiş, Asır bulmacası[2] daha bile zor. Çözümü en az 100 hamleyle mümkün. Ve bir de bitirme pozisyonu başlangıç pozisyonunun ters çevrilmiş hali olacak diye tuttursan, *gerçekten* çok zor. Ona da Bir Buçuk Asır bulmacası diyorlar çünkü 151 hamlede çözülüyor." (Bakınız Şekil 12.)

Taksi frenlerini gıcırdatarak pizzacının önünde durdu; Cem şoföre parasını verdi. İçeriye girip oturdular. Rahmi ekstra peynirli derin tepsi pizzası sipariş etti. Cem çok malzemeli özel bir pizza sipariş etti, içinde peperoni, ton balığı, kapari, ançüez, et, ananas, mısır, bir tam muz, balonlu sakız, meyan kökü ve bir de alev almış maytap vardı. Gülmekte olan garsona "Çok severim," diye açıkladı. "Belirttiğim sırada aşağıdan yukarıya doğru hazırlansın lütfen."

Pizzalar geldiğinde Cem'inki olması gerektiği gibi durmuyordu. Hamuru da dahil çoğu malzeme tersti. Garson bir tam ton balığı koymuş ve meyan kökünü yakmaya çalışmıştı.

Omzunun üzerinden, "Bulmacanızı afiyetle çözün beyefendi" dedi.

1- Donkey puzzle.
2- Century puzzle.



Şekil 12

Daha zor olan, üç adet kaydırma bulmacası. Çapraz taranmış alanda istenilen düzenlemeye izin var.

Tepedeki ok, Eşek bulmacası.

Ortadaki ok, Asır bulmacası.

Alttaki ok Bir Buçuk Asır bulmacası.

"Geri gönder," diye önerdi Rahmi.

"Hayır, olmaz, ne dediğini sen de duydun. Ben sınanmaya dayanamam, sonuçta bu bir karakter testidir. Pizzayı yeniden düzenlesem yeter." Cem ton balığını eline alıp koyacak bir yer ararken meyan kökünü üfleyerek söndürmeye çalıştı. Peki, peperoni nereye girmişti? Ah, tabii ki ananasın içine. Tabak yeterince büyük değildi... Öfleyip pöfledi, ton balığını geri koydu. Müdürü çağırıp bulmacasının zorluğundan şikayet etmek üzereydi.

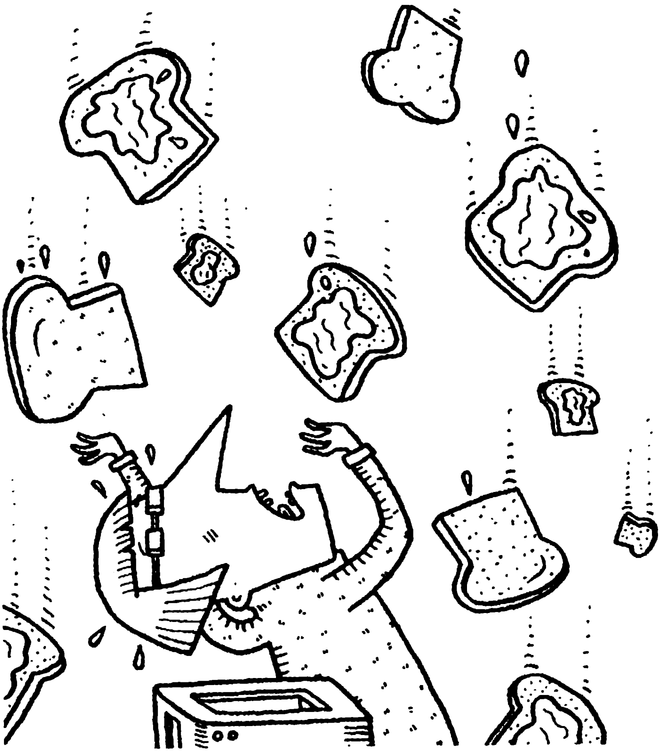
Sonra dik oturdu, omuzlarını düzeltti ve kağıt kalem almaya uzandı.

"Ne yapıyorsun?" diye sordu Rahmi.

"Çözebilirim. Bu bulmacanın bir haritasını yapayım da gör."

4

Antropomörfik İlke



Murphy Kanunu der ki: Eğer bir işin ters gitme ihtimali varsa, ters gider. Ve bir işin ters gitmesi ihtimal dahilinde değilse, yine de ters gider. Mesela tereyağlı ekmek masadan düşecek olursa, mutlaka yağlı yüzü üzerine düşecektir. (Tabii yanlış tarafı yağlamadıysanız...) Peki, bu durum gerçekten de Murphy kanuna bir örnek midir, yoksa fiziksel dünyanın engellenemez bir özelliği midir?

Hiç ekmeğim olmadı
Ne uzun ne de kısa,
Kumlu yere düşseydi,
Hem de yağlı yüzü üstüne.

Demiş şair James Payn, Thomaas Moore'un *The Fire Worshippers*'da bir ceylan hakkında yazdıklarının parodisini yaparak. Bahsi geçen olay Murphy Kanununun en esas örneğidir: "eğer bir işin ters gitme ihtimali varsa, ters gider." Kökenleri 1940'larda bir USAF[1] Yüzbaşısı (bilin bakalım soyadı ne?) tarafından yapılan deneylere dayanır. "İşin ters gitmesi ihtimal dahilinde değilse, yine de ters gider." gibi birçok türev ve genişlemesi mevcuttur; Murphy'den farklı isimler altında da görülür.

1991 yılında BBC de yayınlanan televizyon programı *QED*'de, insanların ellerindeki ekmek dilimlerini çeşitli koşullar altında havaya fırlattığı deneyler gerçekleştirilmiş ve her durumda elde edilen sonuçların istatistiksel olarak saf şanstan ayırt edilemez olduğu görülmüştür. Bu mesele, böylece nihayetine ermiş olabilirdi; tabii Rober Matthews olmasıydı. Matthews matematiksel damarlı İngiliz gazeteci-yazar Robert Matthews olmasaydı. Tipik bir Mathews hesabı, mesela, diyelim ki camları patlamış bir binanın resmiyle başlar ve rüzgar hızının tahmin edilmesiyle biter. *European Journal of Physics*'deki[2] makalesinde *QED*'nin deneylerinde iki tane sorun olduğundan bahseder. Birincisi, Murphy Kanunu, tanımı gereği, doğruluğunu sınamak için kurulmuş herhangi bir testi başarısızlığa uğratabilir. İkincisi, nor-

1- Amerikan Hava Kuvvetleri
2- Avrupa Fizik Dergisi.

mal bir kahvaltı sofrasında ekmekler rastgele havaya fırlatılmaz. (Tamam, *sizin* ailenizin kendine özgü gelenekleri olabilir ama temelde söylediğim şey doğru.) Ekmek dilimleri genellikle masadan yan yan ittirilerek düşer ve bütün deneyler de bu özelliği tasarı ve tetkiklerine yerleştirmek durumundadır.

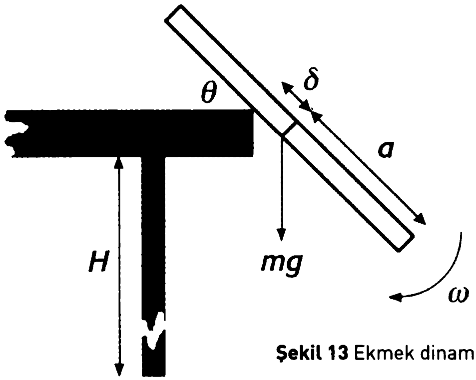
İlerlemeden önce, genel bir yanlış anlamayı açığa vurmak yerinde olur. Düşen yağlı ekmeğin asimetrik hareketleri, üzerindeki yağ kütlesinin sonucu *değildir.* Tipik bir ekmek dilimi yaklaşık 40 gram gelir, yağ bunun en fazla %10'nu oluşturur ve zaten çoğunlukla merkezsel bölgelere dağılmıştır. Ekmeğin dinamiği üzerine etkisi görmezden gelinebilecek kadar ufaktır. Yüzey pürüzlülüğündeki değişiklikten dolayı oluşan, ekmeğin aerodinamiği üzerindeki etkisiyse, çok daha ufaktır.

Matthews, Murphy Kanununu çok daha basit bir asimetrikliğe dayandırır: ekmeğin üst yüzeyi yağlanmıştır ve bu yüzey ekmek masanın kenarından itildiği anda yukarıya bakmaktadır. Ekmek, zemine doğru yaptığı yolculuk sırasında, kütle merkezinin başlangıçtaki konumuna bağlı olan açısal bir hızla döner. Normal bir masanın boyu, Dünyanın yerçekimsel kuvvetiyle birlik olup ekmeğin dönmesinde 180°'nin *tek* sayı katlarının daha ağırlıklı görülmesini sağlıyor olabilir mi? Eğer gerçekten de öyleyse, ekmek her seferinde yağlı yüzü üzerine düşecektir. Matthews'un hesaplarına göre kısa cevap şu: evet. Hatta ekmeğin bir tek yarım dönüş yaparak yağlı yüzü üstüne düştüğü durumlar açık ara en sık görülenlerdir.

Bu hüzün dolu rastlantının sebeplerini eşelemeden önce, bizi bu sonuca yönlendiren matematiksel argümanların bir listesini çıkarmak gerekir. Ekmeğin başlangıç düzeneğini ve bu düzenekteki önemli değişkenleri, Newton'un hareket yasalarından çıkarılmış alakalı formüllerle beraber Şekil 13'de görebilirsiniz. Esas sonuç şudur ki ekmek diliminin "kritik sallantı parametresi" yani, ekmek diliminin başlangıçta ne kadar sallantıda olduğunun ekmeğin yarı uzunluğuna olan oranı, en az %6 olmadan yağlı yüzeyi yukarıya bakacak şekilde düşmesi mümkün değildir. Deneyler gösteriyor ki normal bir ekmek dilimi için bu de-

ğer %2, tost ekmeği için ise %1,5'dir. Bunların ikisi de ekmeğin yolculuğu sırasından en az 360° dönmesi için yetersizdir. Ekmek muhtemelen, en az 180° döneceğinden yağlı yüzeyin yere yapışması ihlal edilemez bir kural olarak görülüyor.

Ekmek Diliminin Mürphodinamiği



Şekil 13 Ekmek dinamiği değişkenleri.

Önemli değişkenler (Bakınız Şekil 13) söyledir:
g = yerçekimine bağlı ivme
m = ekmek diliminin kütlesi
a = ekmek diliminin yarı uzunluğu
δ = başlangıç sallantısı
θ = dönme açısı
ω = dönmenin açısal hızı
H = masanın yüksekliği.

$\eta=\delta/a$'ıyı sallantı parametrisi olarak tanımlayalım. Şu halde ekmek, masanın kenarı üzerindeki sallantısına devam ettiği sürece Newton'un hareket kanunları şu ilişkiyi verir.

$\omega^2 = (6g/a)(\eta/(1+\eta^2))$

Ekmeğin masanın yüzeyi ile yaptığı sürtünmenin kuvveti, ilgili ağırlık parametresini geçtiği anda ekmek kaymaya başlar. O andaki dönme oranı ne ise, ekmek dilimi oradan sonraki düşüşü boyunca da aynı oran ile dönecektir.

Basit yakınsamalar göstermektedir ki ekmek yolculuğu sırasında en azından 180° döner. Yağlı yüzünün yukarıya gelebilmesi için en azından 360° dönmesi gerekmektedir. Ekmeğin ne hızla döndüğünü biliyo-

ruz ve *H* (*g* ile beraber) yolculuğun ne kadar süreceğini söylüyor. Matthews gösteriyor ki sıradan boyutlardaki masalar ve ekmekler için en az 360° dönebilmesi, kritik sallantı parametresi *h*'nin en az 0.06 olmasını gerektiriyor. Kritik sallantı, ekmek masadan ayrılıp da düşmeye başladığı anda gerçekleşir.

●●

Biraz önce yapılan analiz bir kaç varsayımda bulunmaktadır. Bunlardan biri, ekmeğin yere değdiği anda geri zıplamayacağıdır. Yağ oldukça yapışkan olduğundan, bu mantıklı bir varsayım: normal sonuç bir *doink* değil de *şlap* olmalıdır. Bir diğeriyse ekmeğin, kritik sallantı değerinde masadan ayrılabilmesi için masanın kenarından yavaşça kayarak düştüğü varsayımıdır. Daha detaylı bir analiz ile gösterilebilir ki ekmeğin masadan ayrıldığı sıradaki yatay hızı 1.6m/s'den az olduğu sürece (ki gayet tatminkar bir dürtükleme olur), bunun ekmeğin dönme sayısı üzerinde ciddi bir etkisi olamaz. Bu sonuç, yağlı indirgemeyi engellemek için bir yöntem de önermiş olur: eğer ekmeğinizin köşeden aşağıya kaydığını fark ederseniz, elinizin tersiyle essahlı bir tokat atarak ekmeği odanın öteki ucuna doğru uçurunuz. Bu yöntemin başka istenmeyen sonuçlar doğurması olasıdır –örneğin evin kedisinin çarpışma noktasında oturuyor olması– ama halınızın yağlanmasını engelleyecektir.

Bu analizler iyi, hoş ama Murphy Kanununun, insan kültürünün masa ve ekmek boyutlarına atadığı rastgele değerlerin yine tamamen rastlantısal olan dünyanın yerçekimsel alanıyla ortaklaşa ortaya çıkardığı "mörphik rezonans"ın garip bir hali ve sadece bir rastlantı olduğu ima ediliyor. Matthews, bu çıkarımdan daha yanlış bir şey olamayacağı görüşünde. Murphy Kanunu, fırıl fırıl dönen bir ekmekte vücut bulduğu şekliyle, doğadaki temel değişmezlerin derin bir sonucudur. Ucundan kıyısından bize benzeyen herhangi bir canlı içeren her evren, mecburen bu canlıları Murphy Kanununa maruz bırakacaktır –tabii en azından masada oturarak yağlı ekmek yiyorlarsa.

Bu argümanın tam detaylı açıklaması teknik ve dolambaçlı

olsa da ana çizgileri basit bir şekilde sunulabilir. Anahtar bilgi W.H. Press tarafından 1980'de açıklandığı üzere şöyledir ki herhangi bir iki ayaklı organizmanın boyu, bulunduğu yerçekimsel alan tarafından sınırlandırılır. Dört ayaklı canlılara kıyasla, iki ayaklılar doğal olarak daha dengesizlerdir: düşmeleri için ağırlık merkezlerinin ayak izlerinin ötesine geçmesi yeterli olduğundan, çok daha kolay devrilebilirler. Dört ayaklıların denge alanı çok daha geniştir. (Zürafaların insanlardan uzun olması şans eseri değildir.)

Kritik boy, düşme durumunda kafaya alınan darbenin ölümcül olma ihtimalinin yüksek olduğu uzunluktur. Tabii ki bu argüman, vazgeçilemez ekipmanların çift ayaklının tepesinde bulunduğunu farz eder ama bu daha ileriyi görebilmek gibi evrimsel avantajlar sağlamaktadır. Bu tip tartışmalarda eğlencenin önemli bir kısmı akla yatkın varsayımlarda bulunarak, argümanın nereye gittiğine bakmaktır. Diğer yarısıysa, ki bunu size ödev olarak bırakıyorum, bu varsayımları inkar edip argümanın *o zaman* nereye gittiğine bakmaktan geçer.

Bilinçli bir çift ayaklı tarafından kullanılacak masanın boyunun, canlının boyunun yarısı kadar olacağını farz etmek de mantıklı olur. Murphy Kanunu Dünyada çiğneyebilmek için, bir masanın yüksekliğinin 3 metre olması gerekir, bu da demek ki mörphik rezonansın talihsiz sonuçlarından kaçınabilmek için boyumuzun 6 metre olması gerekirdi. Esas derin soru şudur ki: uzaklardaki bir gezende yaşayan birtakım uzaylıların mörpholojik dokunulmaz olması mümkün müdür?

Bu soruya cevap verebilmek amacıyla Matthews söz konusu uzaylıyı, kritik parçası tepesindeki bir küre olan silindirik bir polimer olarak tasarlar. Ben böyle bir canlıya polimörph derim. Ölüm, polimer tabakadaki kimyasal bağların yırtılması olarak canlandırılır. Analizler gösterir ki aklı başında, yaşayabilir bir polimörphün uzunluğu en fazla

olabilir. Bu formüldeki argümanların tanımı şöyle verilir:

n = herhangi bir yırtılmanın yaşandığı düzlemdeki atom sayısı

$$\left(\frac{3nq}{f}\right)^{\frac{1}{2}} \mu^2 A^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G}\right)^{1/4} a_0$$

(genellikle 100 civarı)
q = 3×10^{-3} polimerlerle ilgili bir sabit
f = polimer bağları yırtarken harcanan kinetik enerjinin kesri
μ = Bohr yarıçap biriminde polimer atomlarının yarıçapı
A = polimer maddenin atomik kütlesi
α = elektronik düzgün yapı sabiti $e^2(2h\varepsilon_0 c)$. Burada e elektrondaki yük, h Planck sabiti, ε_0 açık uzayın geçirgenliği ve c'de ışık hızı.
α_G = düzgün yerçekimsel yapı sabiti. Burada G yerçekimsel sabit ve m_p de protonun kütlesi,
a_0 = Bohr yarıçapı.

Bizim evrenimiz için geçerli olan değerleri yerine koyduktan sonra görüyoruz ki bir polimörph için güvenli uzunluk 3 metredir. (Bu arada dünyanın kayda geçmiş en uzun kişisi Robert Wadlow ‹un boyu 2.72 metredir.) Mutfak halısını yağlamaktan kaçınabilmek için gerekli olan 6 metreden çok daha kısa.

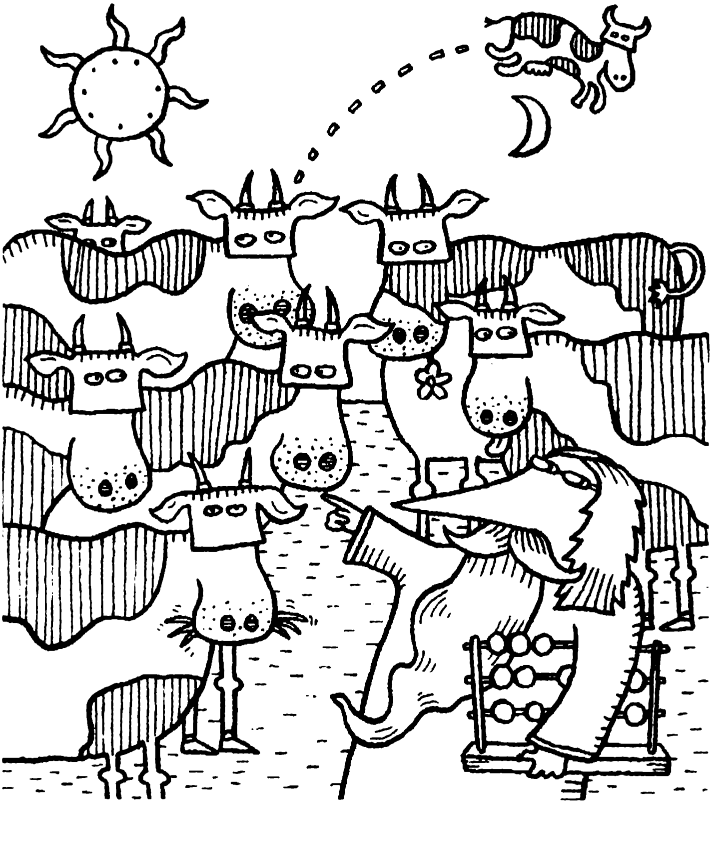
İlginçtir ki polimörph boyundaki bu üst sınır uzaylının bulunduğu gezegenden bağımsızdır. Bunun sebebi, polymörphün parçalanmaması için gerekli olan içsel çekim kuvvetlerinin ve elektrostatik ve elektron yozlaşma etkilerinin gezegenin yerçekimini daha temel sabitlere dayandırmasıdır. Haliyle göstermiş bulunuyoruz ki Murphy Kanunu hiç de rastlantısal değildir, tam tersine daha derin bir "antropomörphik ilke"nin sonucudur: genel görgüye uygun bir şekilde inşa edilmiş herhangi bir evrendeki bilinçli polymörphler, Murphy Kanununa tabidir. Matthews şöyle bitirir "Einstein'a göre Tanrı kurnazdır ama kötü niyetli değildir. Gerçekten de öyle olabilir ama düşen yağlı ekmek üzerindeki kudreti, maalesef tatminkar olmaktan uzak."

Esas makalem burada bitmiş olsa da "Murphy Kanunu" tabirinin tarihinden, yakın ilişkileri anlamak için kullanılmasına karşı çıkanlara kadar, o kadar beklenmedik derecede yorumlara maruz kaldım ki okuyuculardan birkaçının tepkilerini kayıt altına almak yerinde olacaktır. Mississippi Kadın Üniversitesinden David Carson, bir grup öğrenci ve hocaların (a) ekmekleri bel

boyundan başlayarak rastgele yukarıya fırlattıkları (b) masanın kenarından aşağıya ittikleri (c) on feet alüminyum merdivenlerin tepesinden ittiği deneyleri bildirdi. (a) ve (c) durumlarında yağlı yüzeyin aşağıya gelme oranları sırasıyla %47 ve %48 ama (b) durumunda %78. Başarı! Ne var ki ekmeklerinin genellikle "şlap" etmektense "doink" ettiğini bildirdiler. Berkeley›deki Kaliforniya Üniversitesinden Carlo Sequin, problemin Tanrı›nın yapmış olduğu evren tasarımında değil de ekmeğin *yanlış boyutlarda* üretilmesine sebep olan "Tost Ekmeği İçin Amerikan Standartları Komitesin"de olduğunu belirtmiştir. St.John Kolejinden John Steadman da Murphy Kanunun doğanın kurallarının (sadece sabitlerinin değil) derin bir sonucu olmakla kalmayıp, doğanın kanunlarının da Murphy Kanununun derin bir sonucu olduğunu, gayet ikna edici bir argümanlar serisiyle göstermiştir. Örneğin termodinamiğin ikinci kanunu olan "hareketlerin geri alınamaz sonuçları vardır", Murphy kanununun ahlaki boyutunu yansıtır ve kuantum fiziği de Murphy'nin kötümser halinden başka bir şey değildir: "Eğer bir işin ters gitme ihtimali varsa, *çoktan gitmiştir.*"

5

Güneşin Sığırlarını Saymak



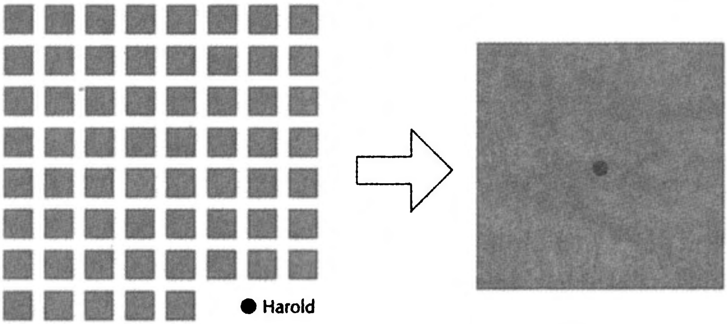
Antik Yunan Arşimet, arkadaşı Sirenaykalı Eratosthenes'e "Eyy yabancı, eğer gayretli ve bilgeysen, bir zamanlar Sicilya'nın Trak adasında otlamış, güneşin sığırlarının sayısını hesapla..." diye yazmış. İlk kez 1880'de keşfedildiği üzere cevabın 206,545 basamağı vardır. Ama modern sayılar kuramından gelen irfanı birazcık bilgisayarlı cebirle kullanarsak, kesin bir formül bulmamız mümkün.

İngiliz bilmececi Henry Ernest Dudeney 1917 tarihli Amusement in Mathematics[1] kitabında Hastings Muharebesiyle ilgili "antik keşiş tarihnamesindeki ilginç bir paragraf" bahsetmiştir. Alman dramatist Gotthold Ephraim Lessing, Wolfenbüttel kütüphanesinde bulduğu bir problemi 1773 yılında yayınlar: Bu problem, 22 adet ikili mısradan oluşuyordu ve Güneşin Sığırları üzerine bir ağıt şeklindeydi, kaynağı MÖ250 yıllarına Arşimet›e dayanıyordu. Bu iki bilmecenin ortak bir matematiksel tarafı vardır, bu alandaki çalışmaları pek kendine ait olmayan silik bir 17. yüzyıl matematikçisi atfen (yanlış) adlandırılmış sözde "Pell Eşitliği". Ilan Vardi (Occidental Kolleji, Los Angelas) yakın zaman önce Arşimet'in Sığır Problemini, bilgisayar cebir paketi Mathematica'nın da yardımlarıyla yeniden canlandırmıştır. Bu konuyla ilgili matematik çoğunlukla klasik olsa da bazı kısımları hala daha araştırmacı matematikçisine zihinlerini meşgul etmektedir ve oldukça kafa karıştırıcı olabilir.

Dudeney'in bilmecesinde "Harold'ın askerleri yan yana dip dibe durdular, adetleri öyleydi ve altmış bir tane kare oluşturdular, her karede aynı sayıda adam... Harold kendini de kavganın ortasına atınca, Saksonlar kudretli bir tek kare adam oldular, "Ut!","Olicrosse!" "Godemite!" diye nara attılar." denir. Dodeney, "Bunu yapabilecek en küçük adam sayısı nedir?" diye so-

1- Matematikte Eğlence.

rar Dudeney. Matematiksel olarak yapmak istediğimiz şey, 61 ile çarpılıp bir eklenince yine tam kare veren (Şekil 14) en küçük tam kareyi bulmaktır. Yani $y^2=61x^2+1$ denklemini sağlayan tam sayı ikililerini arıyoruz. Bariz cevap olan $x=0$, $y=1$'i (Harold artı sıfır büyüklüğünde bir ordu ki bu "*kudretli*, bir tek kare " değildir) elemek amacıyla, x in en az 1 olması konusunda ısrarcı davranmak 1650 ile 1750 arasında Pierre de Fermat ve Leonhard Euler gibi matematikçiler tarafından geliştirilen kurama göre, 61



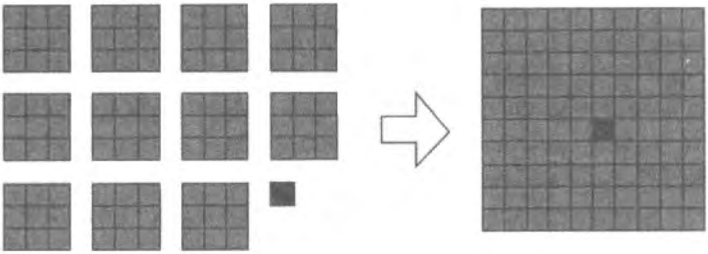
Şekil 14

Harold artı 61 kare adamı, bir tek kare oluşturabiliyorsa, Haroldıın adam sayısı en az kaç olabilir? zorundayız. Okumaya devam etmeden önce bu denklemi çözmeye çalışmak isteyebilirsiniz. Çok fazla uğraşmayın ama.

yerine tam kare olmayan herhangi bir tam sayının yazılabildiği bu tipte denklemlerin her zaman sonsuz çözümü vardır. Eğer 61 bir tam kare ile değiştirilirse, denklem iki tane ardışık tam kare sayı gerektirir ve bunun da tek cevabı, ilginç olamayacak kadar basit $x=0$, $y=1$ ikilisidir. Çözümlerin hesaplanma süreci "sürekli kesirler" denen bir yöntemle işler: bu yöntem çoğu sayılar kuramı kitabında ve Albert H. Beiler'in *Recreations in the Theory of Numbers*[2] isimli eğlenceliğinde bulunabilir. (Bakınız, Ek Kaynaklar) Isınma çalışması olarak, Kral Harold'ın adamlarının 11 kare oluşturduğu ama diğer her şeyin aynı kaldığı, daha az bilinen Brighton Muharebesini (1065) örnek alalım. Şimdiki denklem $y^2 = 11x^2+1$ olur ve biraz deneme yanılma ile ortaya çıkar ki çözüm $x=3$, $y=10$ ikilisidir (Şekil 15). Yani, $100 = 11\times9+1$. Bir

2- Sayılar Kuramında Eğlence ve Dinlence.

sonraki çözüm x=60, y=199 ikilisidir ve bir kez en küçük çözümü buldunuz mu diğer bütün çözümleri bulmanızı sağlayan bir prosedür mevcuttur.



Şekil 15

Kral Harold'ın y^2=11x^2+1 denklemini çözmek zorunda kaldığı, Brighton Muhaberesi (1065).
Çözüm x=3, y=10 ikilisidir.

Dudeney'in bilmecesi deneme yanılma ile çözülemez, gerçi, belki bilgisayarla olur ama elle olmaz, zira en küçük çözüm x = 226.153.980, y = 1766.319.049 ikilisidir. Pell Eşitliği, y^2= Dx^2+1'in çözümü D'ye bağlı olarak vahşice değişir. D için 100'e kadar olan, yani x için 1000'den daha büyük değerler gerektirecek "zor" çözümler D = 29, 46, 53, 58, 61, 67, 73, 76, 85, 86, 89, 94 ve 97. Bunlar içinde açık ara en belalısı 61'dir, yani Dudaney ustaca bir seçim yapmış. Biraz gayret göstererek, Dudaney'in sinsi 61'inin iki tarafındaki D = 60 ve D = 62 durumlarında neler olduğunu muhtemelen bulabilirsiniz. Cevaplar bu bölümün sonunda var.

Ama size belirtmek isterim ki bilmeceyi çok daha zor bir halde sunabilirdi: D = 1597 için mümkün olan en küçük çözüm ikilisi:

x = 13.004.986.088.790.772.250.309.504.643.908.671.520.8 36.229.100

y = 519.711.527.755.463.096.22.4.266.385.375.638.449.943. 026.746.249

Durum, D = 9781 için çok daha kötü.

Arşimet'in Eratosthenes'e yazdığı mektupta iliştirdiği bilmece

"Eyy yabancı, eğer gayretli ve bilgeysen, bir zamanlar Sicilya›nın Trak adasında otlamış, güneşin sığırlarının sayısını hesapla..." diye başlar. Homer'ın Odysseia'sında 350 tane güneşin sığırı olsa da Arşimet'in aklında daha büyük bir rakam vardır. Modern gösterimler altında, bir seri eşitlikler halini alan şartlar belirtir. Sürü, W sayıda beyaz boğa, B sayıda siyah boğa, Y sayıda sarı boğa, D sayıda benekli boğa ve benzer şekilde w, b, y, d sayılarında inekten oluşmaktadır. Yedi tane "kolay" şartın yanında iki tane de belalı şart vardır. Kolay şartlar:

$$W = (1/2 + 1/3B) + Y$$
$$B = (1/4 + 1/5)D + Y$$
$$D = (1/6 + 1/7)\, W + Y$$
$$w = (1/3 + 1/4)(B + b)$$
$$b = (1/4 + 1/5)(D + d)$$
$$y = (1/6 + 1/7)(W + w)$$
$$d = (1/5 + 1/6)(Y + y)$$

Daha belalı olanlar:

$$W{+}B = \text{tam kare}$$
$$Y{+}D = \text{üçgensel sayı}$$

Burada üçgensel sayı ile $1+2+3+\ldots+n$ şeklinde olan sayılar kast edilir ki bu toplam $n(n+1)/2$'ye eşittir.

İlk yedi eşitlik bir tek şarta indirgenebilir: sekiz bilinmeyin hepsi birbirine sabit oranlarla bağlıdır. Detayları çözümleyerek ilk yedi eşitliğin bütün çözümlerinin, herhangi bir n sayma sayısı için aşağıdaki şekilde olacaklarını buluruz.

$$W = 10.366.482n \quad B = 7460.514n \quad Y = 4149.387n \quad D = 7359.060n$$
$$w = 7206.360n \quad b = 4893.246n \quad y = 5439.213n \quad d = 3515.820n$$

Daha detaylı bir anlatım için Beiler'in kitabına ya da Vardi'nin makalesine bakabilirsiniz (Ek Kaynaklar). Lessing, aslında n = 80 durumuna denk gelen, kendine özgü bir çözüm sunar ama bu çözüm bütün şartları sağlamamaktadır. 1880 yılında A. Amthor çözümü nihayete erdirdi ve 206.545 basamağı olduğunu göster-

di! Bu sayıyı kesin olarak hesaplamamış ama ilk dört basamağı vermiştir. 1889 ve 1893 arasında Hillsboro, Illinois Matematik Kulübü (A. H. Bell, E. Fish, and G.H. Richard) çözümü, ilk 32 basamağı (30'u doğru) verecek şekilde genişletmiştir. İlk tam çözüm 1965 yılında H. C. Williams, R. A. German, ve C. R. Zarnke (Waterloo Üniversitesi) tarafından bulunmuştur. 206.545 basamağın eksiksiz listesi ilk kez 1981 yılında Harry L. Nelson (Ek Kaynaklar) tarafından yayımlanmıştır. Hesabı, bir adet CRAY-1 süper bilgisayarı kullanarak, 10 dakikada tamamlamıştır.

J.F. Wurm, daha önce, 1830 yılında, $W+B$'nin bir tam kare olması şartını görmezden gelerek problemim biraz daha basitleştirilmiş halini çözmüştür. (Problemin orijinal ifadesindeki boğaların, genişliklerinden daha uzun olmaları sebebiyle sayıları bir kare olamasa bile, kare oluşturabileceklerine dayanan bir belirsizlikten kuvvet alan Wurm, bu açıklığı suiistimal etmiştir.) $Y+D$'nin bir üçgensel sayı olması şartı, biraz cebirle, $92.059.576n+1$ bir kare olmak zorundadır şartına dönüşür. Bu eşitliğin en küçük çözümü de altı üstü 5916.837.175.686 sayısıdır.

Wurm'un "çözümünde" $Y+D$ sayısı tam kare değildir. Yine de n için sonsuz çözüm vardır ve bunların arasında, söz konusu eksik şartı sağlayanların en küçüğünü arayabiliriz. Amthor'un da gösterdiği üzere n, $4456.749m^2$ şeklinde olmalıdır; buradaki m, aşağıdaki Pell Eşitliğiyle belirlenir:

$$410.286.423.278.424m^2+1 = \text{tam kare}$$

Böyle m'lerin en küçüğünü bulmak için, etkinliği Euler tarafından gösterilmiş "sürekli kesirler" metodunu kullanmak yeterli olacaktır.

Yakın bir zamana kadar da hikayemiz işte burada biterdi. Ne var ki günümüz matematiği Amthor'un elinde olandan daha fazla gereçlere ve yüzbinlerce basamaklı aritmetik işlemleri göz açıp kapayıncaya kadar yapabilen bilgisayarlara sahip. Vardi, Mathematica'nın yukarıda bahsi geçen analizi sa-

niyeler içinde tekrar edebildiğini gördü. Biraz daha zorlayarak Mathematica'nın, sürünün büyüklüğünü kesin olarak belirleyebildiğini keşfetti ki bunu daha önce hiç kimsenin aklı almazdı. Hesaplar –sığırların sahibi göz önüne alındığında uygun bir seçim olmuş olan– bir Sun Workstation'da bir buçuk saat sürdü. Neticede aşağıdaki sabitler için,

$p = 25.194.541$

$q = 184.119.152$

$a = 109.931.986.732.829.734.979.866.232.821.433.901.088.049$

$b = 50.549.485.234.315.033.074.477.819.735.540.408.986.340$

toplam sığır sayısının aşağıdaki sayıdan büyük ilk tam sayı olduğu ortaya çıktı:

$(p/q)(a+b)\sqrt{4729.494})^{4658}$

Akademisyenler arasında, Arşimet'in gerçekten bu soruyu sorup sormadığıyla ilgili bazı tartışmalar vardır. Lessing tarafından gün yüzüne çıkarılan yazı, bir başkasının (kim olduğu bilinmiyor) raporuna dayanıyor olsa da genel görüş Arşimet'in bu soruyu sorduğu yönünde. Ne var ki Arşimet'in kendi sorduğu soruyu çözüp çözemediğiyle ilgili pek bir tartışma yok. Kesinlikle çözmüş olamaz: sayılar çok büyük. *Kum Hesaplayıcı'sı* naçizane 206.545 basamaklı bir sayıyı ifade etmekte hiç zorlanmayacak olan Arşimet'in önünde soyut büyüklük bir engel olamazdı ama elle hesap etmek, modern ifadeler kullanıldığında bile çok uzun zaman alırdı.

Arişmet'in, bir çözümün varlığını bilmek için bile herhangi bir sebebi var mıydı? Muhtemelen hayır. (Gerçekten de bugün bile Ters Pell Eşitliği, $y^2 = Dx^2-1$'i sağlayan D'lerin iyi bir sınıflandırmasına sahip değiliz.) Arşimet, Pell-benzeri bir eşitliğin gerekliliğini akıl edecek kadar zekaya kesinlikle sahipti (Antik Yunanlılar günümüz cebirsel yöntemlerine sahip değillerdi ama benzer fikirleri ifade etmek için başka yöntemleri vardı) ama böyle eşitliklerin her zaman çözümü olduğundan muhtemelen emin olamazdı. Tabii, David Fowler'ın da (Warwick Üniversitesi) belirttiği üzere (Ek Kaynaklar), antik Yunanlıların kendi "sürekli kesirler" yöntemleri vardı; yani *belki*...

Bir kez daha, bu köşede yazılanlar birçok yararlı geri bildirime sebep olmuştur. Drexel Üniversitesinden Chris Rorres, Güneşin Sığırları problemiyle ilgili daha fazla bilginin, Finlandiya'daki Oulu Üniversitesinden A. Nygren'ın "A Simple Solution to Archimedes" makalesinde bulunabileceğini söyledi. Bu makalede Pentium II bir bilgisayar ve Maple ya da Mathematica kullanarak problemi 5 saniyede çözebilen bir algoritma tarif edilir. Bu belgenin PDF ve postscript dosyalarına Rorres'in web sitesinde erişilebilir:

vvww.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html

Nygren'in algoritmasını uygulamak için gerekli Maple ve Mathematica programları da şurada:

vvww.mcs.drexel.edu/~crorres/ArchimedesjCattle/computer2/computer_output.html

Program, bilgisayarınızın hafızasına kopyalanıp Maple ya da Mathematica çalışma sayfasına yapıştırılarak çalıştırılabilir. En ufak çözüm (her biri 206.000 basamaklı dokuz sayı) aynı web sitesinde bulunabilir.

CEVAPLAR

$31^2 = 60\times4^2+1$

$63^2 = 62\times8^2+1.$

6

Büyük Gider Soygunu



Paha biçilmez Robbingham[1] Gergedan'ının çalınmasına, muhteşem Sherlock Holmes bile çok şaşırmıştı. Dr. Watson giderlerin geometrisindeki önemli bir özelliğe dikkatini çekip dedektifin aklını tetikleyince şaşkınlığı geçti. "İmkansız olanları eleyince," diye ilan etti "geriye kalan şey her ne kadar ihtimal dışı görünüyor olursa olsun, gerçeğin ta kendisi olmak zorunda." Mıdır acaba?

1- İngilizce hırsızlık yapmak manasına gelen "robbing" kelimesinden uydurularak Nottingham benzeri türetilmiş bölge ismi, kelime oyunu.

Holmes'un Baker Street'teki meskenine girdiğimde onu, yakmak için gazete, odun ve kömür düzenlerken buldum. Dışarıda kar fırtınası vardı ve odanın içi buzhane gibiydi. Ayağa kalkıp, bana bir mektup uzattı. "Oku Watson ve bana ne düşündüğünü söyle."

Sayfayı hızlıca taradım. "Robbingham Dükünden."

"İsmi mektubun başında olduğu düşünülürse, yaptığın çıkarım basit kaldı."

"Kusura bakma Holmes, sesli düşünme gafletinde bulundum. Sana Robbingham Gergedanı'nın çalındığını, biraz da hazırlıksız ve doğaçlama bir şekilde bildiriyor. "Kabaca şekillendirilmiş, maddi değeri pek yüksek olmayan, önemsiz bir heykel." Ben daha zorlayıcı bir dava bulmanı öneririm, Holmes."

Holmes ince bir şekilde gülümsedi. "Watson, Watson, gözlerini açman için ne yapabilirim? Heykelin kabul görmüş önemsizliği göz önüne alındığında, son cümle senin de ilgini çekmedi mi?"

Mektubu tekrar okudum. Şöyle bitiyordu: Çalınmış olan mülkümün bulunmas*ında yardımlarınızı arz ederim*. "Hayır, Holmes" dedim bende. "Tamamen normal duruyor."

"*El yazısı,* be adam!" diye bağırdı, Holmes. "Yazarın ölümcül bir dehşet hali içerisinde olduğunu göremiyor musun? *ş*'lerin uzantıları kesin olarak gösteriyor, *e*'lerin bombelerinden bahset-

miyorum bile. Geçmişte Robbingham Dükúne ufak tefek yardımlarım olmuştur ve can güvenliği hakkında derin endişeler içerisindeyim. Robbingham Malikanesine giden özel bir tren kiralayacak kadar nazik olursan, ben de hazırlıklarımı tamamlayabilirim."

Uzun yolculuğumuz süresince Holmes kemanıyla kendi kendini eğlendiririrken, ben de matematiksel muammalar hakkında kısa bir kitap okumaya çabaladım. "Baksana Holmes, ilginç bir tane buldum. Adamın biri paralel kenarlı 200 yard genişliğinde bir nehrin ortasında olsun, birden bire sis çöker ve adam bütün yön hissinin kaybeder. Karaya ulaşmak için gereken muhtemel en çok zamanı, en aza indirgeyebilmek için yüzmesi gereken rota ne olmalıdır?"

"Nehrin akıntı yönünü gözlemleyerek kıyının nerede olduğunu bulabilir" dedi Holmes, "ve akıntının yönüne dik bir şekilde yüzerek de kıyaya ulaşır."

"Hayır efendim yapamaz –yani şöyle demek istedim, göl falan gibi bir yer olsaydı?"

"Ama sen kendin nehir dedin. Aman, iyi peki, rota o zaman ne olur?"

"Kimse bilmiyor."

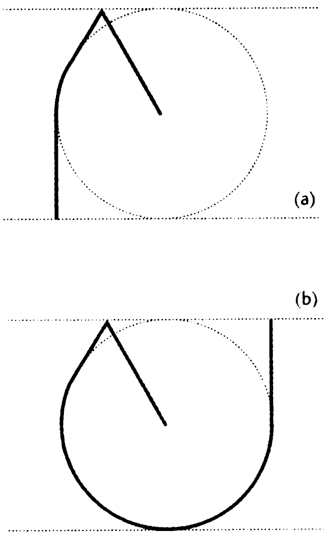
"Ne güzel."

"Ama 100 yard düz gidip sola doğru keskin bir dönüş yaptıktan sonra, bir miktar düz, bir miktar kavisli yay ve bir miktar daha düz giderek çözüme ulaşıldığını *tahmin* ediyorlar (Şekil 16a). Yüzücünün kıyıdan 100 yard mesafede denizin içinde olduğu benzer bir soru daha var (Şekil 16b) ve yine cevap bir tahminden ibaret."

"Büyüleyici," dedi Holmes, alaycı tavrını güç bela saklayarak. "Kendini pratik meselelerle meşgul etmene sevindim Watson." O kemanına döndü bende okumaya devam etmeye çalıştım ama eğlencem tasvipsizliği karşısında ezilmişti.

Robbingham Malikanesine varışımız sonrasında bir hizmetli tarafından Dükün odasına yönlendirildik. Dük, uykusuz bir gecenin acısını çekiyormuşçasına solgun ve süzgün görünüyor-

du. "Teşekkürler Lucinda, bizi yalnız bırakabilirsin. Holmes, seni gördüğüme çok sevindim," dedi, belirgin bir endişe içerisinde. Holmes onu sakinleştirmeye gayret etti ve zamanla hikayeyi parça parça birleştirmeye başladı. Robbingham Gergedan'ı Hindistan'dan, onuncu Dükün Marzipur'un Deli Maharajasına karşı başarılı girişimlerinden sonra getirilmiş bir aile yadigarıydı. Bronzdan yapılmış ve fiilen değersizdi ama gizli bölme içeren boş bir karnı vardı ki aile geleneksel olarak, önemli belgeleri bu bölmenin içinde saklardı. Holmes bu belgelerin içeriğini öğrenmeyi talep edince de Dükün yüzü daha da solgunlaştı. "İçeriklerini açıklayamam, Holmes. Ailenin şerefi üzerindeki çok eski bir lekedir. Eğer açığa çıkacak olursa Robbinghamların sonunu getirir."



Şekil 16

Sisler içinde kaybolmuş bir yüzücünün, takip edebileceği en iyi rotalar olduğu iddia edilen şekiller.

(a) Yüzücü paralel kenarlı bir nehrin ortasındayken.

(b) Yüzücü, düz bir sahilden bilinen bir mesafe uzaklıktayken. (Kesik-kesik doğruların her biri muhtemel deniz kıyısını ifade etmektedir: gerçek kıyı, bunların çember üzerind döndürülmesiyle elde edilebilir.)

"O zaman hayvanın, durum daha fazla alenileşmeden geri getirilmesini ümit etmekten başka çaremiz yok. Çalınmadan önce bulunduğu odayı gösterin."

Dük, hizmetçi Lucinda'yı çağırdı ve bir fener getirmesini söyledi. Küçük, nemli ve her tarafı örümcek ağlarıyla kaplı bir mahzene varıncaya kadar malikanenin labirent gibi koridorlarında

ilerledik. Tek ışık kaynağı, zemindeki dar bir deliğe açılan demir ızgaraydı. Mahzende rahatsız edici bir koku vardı ve yer birkaç inç toz içerisindeydi. Ben bile sayısız ayak izi görebiliyordum. Bir köşede geniş bir kasa vardı. "Gergedan bunun içindeydi," dedi Dük.

Holmes, gözleri ayak izlerinin üzerinde, zemini inceledi. Bir büyüteç aldı ve ızgaraya bakmak için odanın öteki ucuna yürüdü. Benzer şekilde mahzenin kapısındaki kilidi ve kasayı teftiş etti. Dizleri üzerinde çökerek toz içinde küçük bir ambalaj kağıdı buluncaya kadar arandı. Kağıt, parmaklarına yapışıyor gibiydi. Havayı kokladı, eski bir mukavva kutu yığınına bakış attı. "Bu heykel ne kadar büyüktü?"

"Oldukça," dedi Dük ellerini üç feet arayla tutarak.

"O zaman, efendim, gözlem yapmanın gizli alfabesini kavramış herkes için bütün hikaye buradan okunabilir. En başta gergedanın yuvasından uçmuş olabileceğinden korkmuştum ama kargaşanın rengi başkaymış."

Dükün gözleri parıldadı. Ben Holmes'e manalı bir bakış attım ve o da çıkarımlarını anlattı. "Mahzenin kapısına dokunulmamış: hırsız giriş ve çıkışını ızgaradan yapmış. Gizli bölmenin nasıl açılacağını bilmediğinden ve heykeli, mahzen içerisinde dikkat çekmeden kesip açmanın zorluğunu da hesaba katarak, buradan götürdü."

"İyi ama nasıl çıkardı?" diye sordu Dük. "Adamın girebilmesine yetecek yer bile güç bela var ve gergedan çok daha büyük."

"Hah. Heykeli yüzdürebilmek için şişirilebilir lastikten bir tüpe bağladı ve malikanenin dışında bir yerden almak amacı ile kanalizasyon sistemine attı."

"Holmes, bu çok saçma," dedim. "Bunların hepsini tahmin ediyor olamazsın, ayrıca burada bir gider bile yok."

"Watson, yine benim yeteneklerimi küçümsüyorsun. Zeminin üzerinde, bisikletlerinkine benzer bir patlak yamama seti buldum. Belli ki tüp ızgaradan çekilirken delindi ve burada tamirat yapmak zorunda kaldılar. Fark etmiş olmama ihtimalin bulunmayan kokuysa buralarda bir yerde kanalizasyon olduğu-

nu gösteriyor. Kanalizasyon giderinin var olmamasına gelince, onu da kendin bul." Holmes mukavva kutuları tekmeleyerek itti ve geniş, üzerinde iki demir halka olan taştan bir kapak belirdi. "Ayak izlerinin gidiş yönünden dolayı, orada olmak zorundaydı."

Ama hırsızın şansının yaver gitmediğine inanmak için sebeplerim var Watson. Kanalizasyon giderleri üzerine bir ömür araştırma yaptım –belki konu üzerine küçük bir makale yayımladığımı hatırlarsın– ve bu giderin yakın zaman içerisinde tıkanmış olduğundan eminim. Şimdi Watson, kayda değer kuvvetin ile bana yardım edecek olursan, inanıyorum ki bu kapağı kaldırabiliriz.

Fenerin ışığı altında, içi taşlarla örülü, bir yard kare genişlikte derin bir kuyu gördüm. Kuyunun dibinde, bizden 40 feet aşağıda, kabarık balçık hareketsiz duruyordu.

"Bir mahzende olduğumuz düşünülürse kuyu beklenmedik ölçüde derin." Diye homurdandı Holmes.

"Zemin malikaneye yakın yükselir," dedi Dük. "Bu mahzen etraftaki arazinin çoğundan daha yukarıdadır."

"Gergedandan bir iz yok," dedim.

"Yok," dedi Holmes. "Ama kanalizasyon gideri heykel atılmadan önce çalışıyordu. Dışarıya olan yolculuğu sırasında, aceleyle yapılmış olan delik tamiratı yırtıldı ve tüp söndü. Bundan sonra gergedan giderin dibine çökerek, kısmen tıkanmasına sebep oldu. Başka objelerde takılıp sıkıştıktan sonra tıkanma tamamlandı."

"Yani belgeler kanalizasyon giderinde bir yerlerde sıkışmış durumda."

"Aynen öyle. Ama kuyu, birisinin bu taraftan tıkanmayı konumlandırmasına izin veremeyecek kadar derin ve tehlikeli. Kanalizasyon sistemine daha cazip bir noktadan girmeliyiz. Haritaları var mı?"

"Kütüphanede," diye cevap verdi Dük. Ama haritaların hiç biri mahzene bağlanması mümkün olan bir gider göstermiyordu. "Yemin ederim öyle bir harita *vardı,*" dedi Dük, kafası karışık bir şekilde.

"Kaybolmuş," diye çıkarımda bulundu, Holmes.

"Kahretsin," dedim. "Alçak herif çıkış tarafından kanalizasyon sistemine girmiş ganimetini arıyor olabilir." Birden bire akıl ettim, "Holmes, belki bulmuştur bile!"

"Hayır, çünkü bulmuş olsaydı gider en azından kısmi olarak açılırdı," dedi Holmes. "Hırsız da başka bir giriş yolu bulmakta zorlanmış olmalı. Ama bu akşam bulmayı denememesi için bir sebep yok, o yüzden hızlı davranmalıyız." Derin düşünceler içinde bir an durdu. "Malikaneye gelirken toprak çapalayan yaşlıca bir bey görmüştüm."

"Yaşlı Ned'i kastediyorsun. Duvar gibi sağırdır ama çok iyi bir bahçıvandır. Uzun yıllardır ailem için çalışmıştır."

"Belki kanalizasyonun dağılımını hatırlayabilir. Bahçıvanlar genellikle böyle şeyleri unutmazlar."

Holmes, uzun süre elini kolunu sallayıp bağırdıktan sonra Yaşlı Ned'e ne istediğini anlatabildi. "Arrr, urrr," dedi Ned. "Ön bahçenin tam ortasından eski bir kanalizasyon geçer diye duymuştum. Ama kimse nereye gittiğini bilmez –gerçi sondan altıncı aşçı bir keresinde, mahzenlerin altında yukarıya doğru zig zag çizdiğini söylemişti. Aşağıya doğru da ok gibi düm düz gidermiş."

"Bu kanalizasyon nereden gider bize gösterebilir misin?" diye sordu Holmes.

"Arr, hayır. Ama su perisi heykeline az çok 100 yard mesafede olduğunu hatırlıyorum."

"Şerit şeklinde kazmamız lazım," dedi Dük. "Müsait her adamı çağıracağım."

"Kazmamız lazım hem de *hızlı,*" dedi Holmes.

"Ve de doğru bir rotada kazmalıyız" dedim ben de. "Yoksa kanalizasyona dokunmayabilir bile."

"Bizim bilmemiz gereken şey," dedi Holmes. "heykele yüz yarda mesafede *her* doğrusal çizgiyi kesecek en kısa rota."

"Yüz yarda yarıçaplı dairesel bir şeridi kazabiliriz." Diye önerdi Dük.

"Uzunluğu 200π yarda ya da 628 yarda civarında olacaktır," diye hızlıca hesapladı Holmes.

"O kadar uzun bir şerit kazmaya zamanımızın yeteceğine

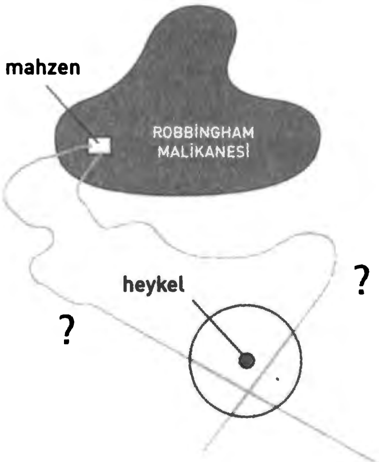
şüpheliyim," dedi Dük. "Gerçi adamlarım o uzunluğa yaklaşabilecektir. Daha iyisini yapabilir miyiz?"

"Peki, Dükün bahsettiği çemberi kesen, 200 yarda uzunluğunda düz bir çizgiye ne dersiniz?" Diye sordum.

"Mükemmel Watson," dedi Holmes "tabii, böyle bir kazı şeridinin birçok muhtemel kanalizasyon konumunu ıskalayacağını hesaba katmazsak."

"Peki, dik açılı iki çizgi kazsak? Uzunluğu 400 yarda?"

"Aynı sorun, Watson. Bunu çok daha dikkatli düşünüp taşınmalıyız. Matematiksel olarak aradığımız şey, 100 yarda yarıçaplı çemberin her kirişini kesen en kısa eğri. Kiriş, daireyi iki noktasından delip geçen düz çizgidir. Tabii ki teğet doğrularını da –daireye sadece bir noktada dokunan düz çizgiler– hesaba katmamız lazım."



Şekil 17

Robbingham malikanesi topraklarının bir kısmı. Kanalizasyon, işaretlenmiş alandan doğrusal olarak geçmektedir. Ama nereden?

"Neden, Holmes?"

"Çünkü yaşlı Ned "en fazla 100 yarda" dedi, buda 100 yarda mesafede olmasını mümkün kılar ki o da teğet doğrularının mesafesidir."

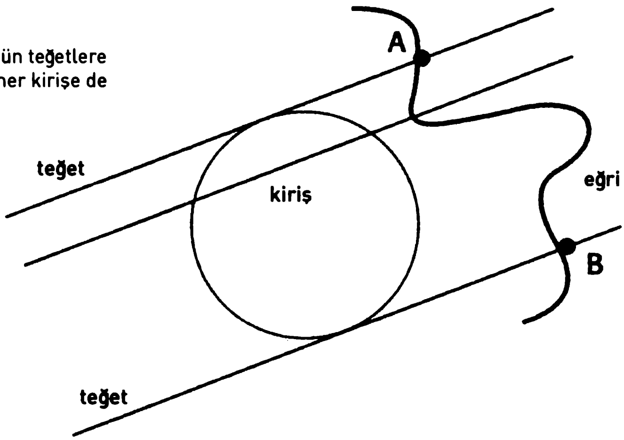
"Haa," dedim, sivri mantığından etkilenerek. "Ama bu çok zor bir soru, zira göz önüne alınması gereken birçok kiriş var. Bir şekilde basitleştiremez miyiz?"

Holmes'ün kafası sürpriz içinde geriye fırladı. "Şahane bir

öneri Watson, hatta haftalardır yaptığın en iyi öneri. Tabii ki sadece teğet doğrularını dikkate almak yeterli olacaktır. Bütün teğet doğrularına değen bir eğri mecburen bütün kirişlere de değecektir."

"Neden?"

Şekil 18
Bir eğri bütün teğetlere değiyorsa, her kirişe de değecektir.



"Herhangi bir kiriş seç ve ona paralel iki teğeti düşün (Şekil 18). Eğri bunların her ikisine de dokunmak zorunda, mesela A ve B noktalarında. Süreklilik sebebiyle A ile B arasında kalan eğri parçası teğeti kesmek zorunda." Derin bir tefekkür içerisinde çenesini kaşıdı. "*Neredeyse* çözmüştüm, Watson. Ama akıl yürütmem de bir açık var."

"Söylesene be adam!"

"İyi, peki. Otomatik olarak her teğete değen bir eğri cinsi var ve bunlar arasından en kısa olanını bulabilirim. Bunlar, bir teğetin bir tarafında başlayıp öteki tarafında biterken, arada kalan çember parçasını saran ve çemberin dışı ya da üstünde kalan eğriler. Böyle bir eğriye müsaadenle *lastik* diyeceğim, zira o teğeti daireye lastikliyor." (Bakınız Şekil 19a.)

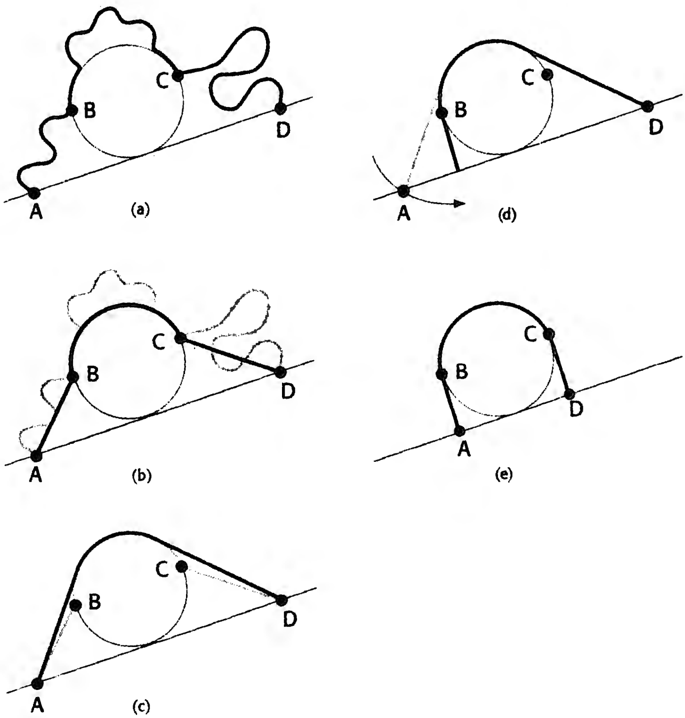
"Yani, bizim en kısa lastiği bulmamız mı lazım?"

"Orası kolay. Evvela, lastiğin bir yerde çembere yapışmak zorunda olduğunu görmek lazım, yoksa lastik "çekilerek" çembere yapıştırılabilir ve bu sırada da kısaltılmış olur. Lastiğin çembere

ilk dokunduğu noktaya B noktası, son dokunduğu noktaya da C noktası diyelim. O zaman, AB ve CD birer düz doğru olmak zorundadırlar, çünkü eğer değillerse yine lastik çekilerek kısaltılabilir. Yine benzer sebeplerden ötürü BC kesiti de çember üzerindeki bir yay parçası olmak zorundadır." (Bakınız Şekil 19b)

"Sanırım, AB ve CD çizgileri çembere teğet olmak zorunda," diye ekledim. "Yoksa eğri, B ve D noktaları gerçekten de teğet oluşturacakları yerlere çekilerek, kısaltılabilir." (Bakınız Şekil 19c.)

"Tabii ki Watson. Son olarak da A ve B noktalarının konumlarını sorgulamalıyız. Bence hem AB, hem DC, AD teğetine dik açıda olmak zorundaymış gibi görünüyor. Çünkü olmasalardı, yine lastiği dik bir açı pozisyonuna "kaydırabilirdik" ve bu yine lastiği kısaltmış olurdu." (Bakınız Şekil 19d)



Şekil 19

(a) Aynı teğet üzerinde başlayıp biterek çemberi saran bir eğri, çemberin bütün teğetleri ile kesişecektir. Böyle bir eğriye, lastik diyelim.

(b) AB ve CD parçaları doğrusallaştırılabilir ve B ile C arasında kalan, çember üzeri salınımlar sıkılabilir.

(c) AB ve CD çembere teğet hale getirildiğinde, lastik kısalır.

(d) Eğer DAB dik bir açı değilse, A ucunu az ileri kaydırarak lastiği kısaltabiliriz. Benzer şekilde D noktası da oynatılır.

(e) En kısa lastik, yarım çember ve uzunluğu çemberin yarıçapına eşit iki adet teğet parçasından oluşur. Aslında bu, her teğet doğrusuyla (ve haliyle her kirişle) kesişen en kısa eğridir.

"Evet, evet," diye haykırdım. " Yani, BC yayı bir yarım çemberdir ve biz de en kısa eğriyi bulmuş oluruz." (Bakınız Şekil 19e)

"Maalesef biz sadece en kısa, *lastiği* bulduk," dedi Holmes. "Yine de daha kısa bir eğrinin nasıl olabileceğini görmekte güçlük çekiyorum."

Birkaç dakika sessizce bekledikten sonra, aklıma bir fikir dank etti. "Hala daha umut var," diye haykırdım. "En kısa lastiğin uzunluğu nedir?"

"$(2+\pi)\times100$, ya da bu durumda 514 yarda," dedi Holmes.

"89 yardalık tasarruf," diye söyledim, manalı manalı. "Kaybedecek zaman yok: Düke adamlarını işe koyması için talimat vereceğim."

Onlar kazarken, Holmes ve ben, daha bile kısa rotalar aramaya koyulduk ama bulamadık. Sonra, bir anda aklıma geldi. "Kitap, Holmes! Tirende okuduğum kitap!" Montumun cebinden çıkardım. "Dur bir bakayım... evet, bir çemberin her kirişini kesen en kısa rota gerçekten de bir yarım çember ve iki düz çizgiden oluşuyormuş."

Holmes kitabıma şöyle bir baktı. "İtiraf etmek zorundayım ki bu ince kitabın değeri hakkında yanlış bir hükme varmışım Watson," dedi. "Sırf meraktan soruyorum ama önerilen rotanın gerçekten de en kısa olduğunu nerden *bileceğiz?*"

"Ne demek canım, hiç şüpheye yer bırakmayacak şekilde ispatlanmış," dedim. "İzin verilen eğri varsayımlarında ufak

farklılıklarla, birkaç farklı insan tarafından ispatlanmış ama ilk ispatlayan H. Joris. Ne var ki bilinen bütün ispatlar şaşırtıcı bir şekilde uzun ve karışık. Eğer birisi kısa ve basit bir ispat bulabilecek olursa, çok ilgi çekerdi."

Böyle problemlerin başka çeşitlemelerini tartışmaya koyulduk –bilinen boyutlarda dikdörtgen bir ormanda kaybolan adam, kar fırtınası bastırdığında eliptik bir donmuş gölde paten yapan kişi... Yaşlı Ned, aniden nara attı; kanalizasyon giderinin yerini bulmuştu. Birkaç dakikalık iş ile yönü de açıklığa kavuşturuldu ve Holmes doğrultu boyunca bakındı. "Ah, evet, uzaktaki bataklığın ardında, derenin aktığı yerde. Çıkış noktasını da ganimetini almaya geldiğinde o herifi de işte orada bulacağız."

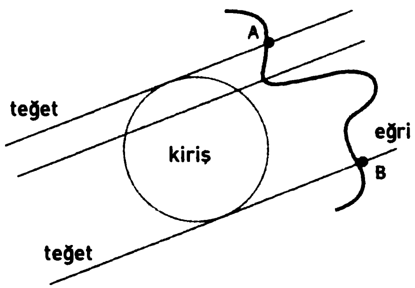
●●●

KAZILABİLECEK EN KISA ROTAYI BULMAK

Watson'ın önerdiği üzere en kısa olduğu iddia edilen rotanın, bir yarım çember ve iki teğet parçasından oluştuğunun ispatı şaşırtıcı derecede karışıktır (Bakınız Ek Kaynaklar). Ne var ki akla yatkın olduğunu göstermek, nispeten düz ve basit bir şekilde ilerler. Evvela, bir eğri, çemberin her teğetiyle kesişiyorsa, her kirişiyle de kesiştiğini gözlemlemek gerekir. Bunun sebebini görebilmek için, kirişe paralel olan iki teğeti ele alalım (Şekil 20). Eğri bunların ikisiyle de kesişmek zorundadır, diyelim ki A ve B noktalarında kesişsin. Süreklilik sebebiyle, eğrinin A ile B arasında kalan parçası teğeti kesmek zorunda kalır.

Haliyle, çemberin her teğetiyle kesişen en kısa eğriyi bulmak yeterli olacaktır. Bu bilgi, ispatı kolaylaştırır çünkü kirişleri unutup, çok daha basit olan teğetlere konsantre olabiliriz.

Hiçbir teğet çemberin içinden geçmeyeceğinden, en kısa eğrinin

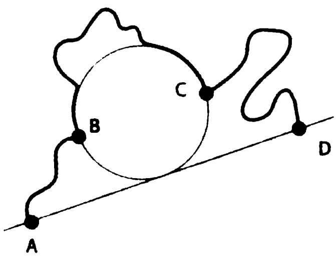


Şekil 20

Eğer C, her teğetle kesişiyorsa, her kirişle de kesişecektir.

çemberin dışı ya da üzerinde kalacağı akla yatkındır. Bu doğru olsa da çok açıkça görülebilen bir şey sayılmaz. Eğrinin, çemberi kesip geçtiğini farz edelim. O zaman, çemberin içinde kalan eğri parçası "heba" edilmiş olur ama bu parçayı eğri üzerinden silerek kurtulamayız, çünkü eğriyi iki parçaya ayırmış oluruz. Eğrinin, uzunluğunu artırmadan çemberin dışından geçecek ve yine bütün teğetleri kesecek şekilde yeniden yönlendirilebileceğini göstermemiz gerekir. Bu, bütün durumların tek tek incelenmesini gerektiren karmaşık bir ispat çıkarır ki o da en zor kısımdır.

Bunu da böylece kabul ettikten sonra, eğrinin aynı teğet doğrusu üzerinde başlayıp bittiğini ve bu sırada da arada kalan çemberin Şekil 21'deki gibi etrafından dolaştığı gösterilir. (Eğri, bazı kısımlarda çemberin üzerinden gidebilir.) Daha da ötesi bu biçimdeki her eğri, otomatik olarak her teğetle kesişecektir. Haliyle, yapmamız gereken tek şey, bu biçimdeki eğriler arasında en kısa olanını bulmaktır. Şimdi, işin geometrisini bu belirli eğriler kümesine indirgemişken, AB ve CD parçalarının düz çizgiler ve BC parçasının da çemberin bir yayı olduğunu göstermek kolay. Buradan da AB ve DC'nin, AD teğetine dik olduğu ve BC yayınında aslında yarım çember olduğu çıkar. (Sezgisel olarak, ABCD eğrisinin, A ve D uçları AD teğeti üzerinde serbestçe do-



Şekil 21

En kısa eğrinin genel formu.

laşabilen, lastikten yapılmış olduğunu hayal ediniz. Lastik çekileceğinden ABCD otomatik olarak mümkün olan en kısa eğriyi oluşturacaktır. Açıkça görülür ki B ile C arasında kalan parça çemberin üzerine sıkıca otururken, AB ve CD de düz çizgilere çekilecektir. DAB ve ADC'nin dik açılar olması da en az bu kadar barizdir.)

"Hırsızın erkek olduğunu düşünüyorsun yani, Holmes?"

"Ayak izlerinden açıkça görüldü ki öyle, Watson."

Ağaçların arasında gizlenerek, beklemek için kurulduk. Güneş batalı çok zaman geçmemişti ki çamurda şapırdayan ayak sesleri duyduk. Maskeli bir şahsiyet görüş alanımıza girdi ve Holmes üstüne atladı. Kısa bir boğuşma yaşandıktan sonra suçlu

sırt üstü yerde uzanıyor ve Holmes de onun üzerinde oturuyordu. Maskeyi kavrayıp çıkardı.

"Aman Allah'ım, bu Lucinda," dedi olay mahalline daha yeni varan Dük. "Canım sen burada ne yapıyorsun? Sakın "hırsız *benim*" deme."

"Allah aşkına efendim, tabii ki hayır. Geçen Pazartesi akşamı, birkaç kutu çerçöpü düzenlemek için mahzene gönderildim ama kapı kilitliydi ve ben de anahtarı bulamadım, Ned mahzende bisikletinin tamiratlarını yapmıştı ve sanırım sonrasında anahtarı iade etmeyi unuttu. Her neyse, ben de ızgaradan aşağıya tırmandım. Açık bir gider deliği ve yanında da taş levhadan kapağı vardı. Kasa açıktı ve bende içindeki komik gergedan heykelini gördüm ve bir bakmak için çıkardım. Beklediğimden daha ağırdı ve yanlışlıkla gidere düştü. Birçok çerçöp de gergedanla beraber aşağıya gitti ve kanalizasyon gideri tıkandı. Aşağıya baktım ama heykeli göremedim, haliyle de tıkanma gerçekleşmeden önce sürüklenip gittiğini düşündüm."

"Lucinda, o heykel *bronzdu*."

"Ben onu tahta üzerine altın yaldızlı boya sandım efendim. Her neyse, panikledim. Taş kapağı gider deliğinin üzerine çektim, üstünü de birkaç eski kutu ile kapadım, kasayı kilitledim ve tekrar dışarıya tırmandım. Bu sabah giderlerin nereye gittiğini gösteren bir harita buldum –ki odamda saklıdır, yemin ederim ki geri verecektim, her neyse, kanalizasyondan içeriye heykeli aramak amacıyla girmek üzereydim ki bu beyfendi..." Holmes'e cilveli bir bakış attı– "üstüme atladı."

"Yani Robbingham Gergedanı, mahzendeki giderin dibinden hiç ayrılmadı," diye akıl yürüttü, Dük, "ve bende altı asırdır özenle bakılmış bir bahçede 500 yardalık çukur açtırdım." Holmes'e sert bir şekilde baktı.

"Bu bir mantıksal çıkarım sorunudur," dedi Holmes. "Sık sık söylediğim üzere, imkansızı eledikten sonra, geriye kalan her ne kadar ihtimal dışı olsa da..."

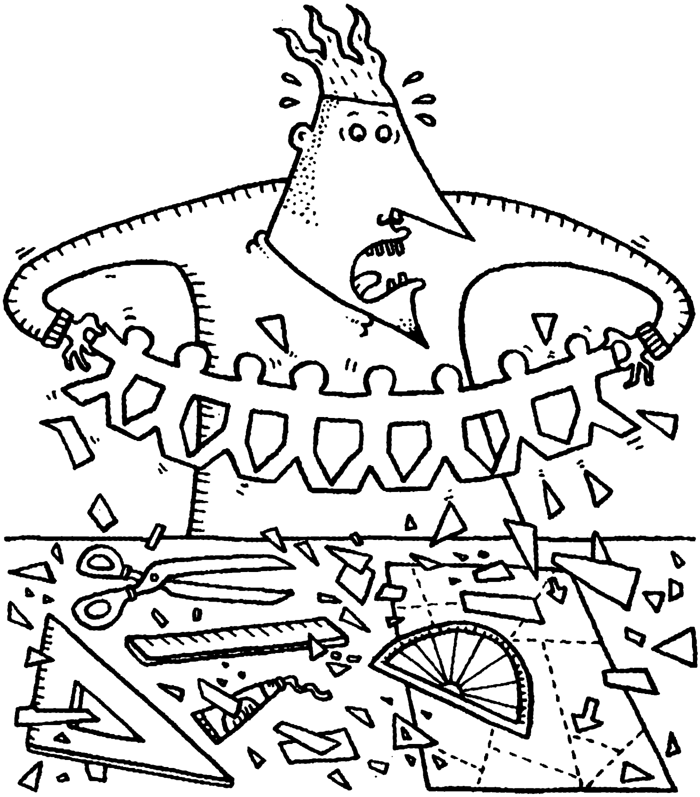
"Evet, Holmes, Evet! Devam et!" diye haykırdım. "Dahiyane!"

"...ihtimal dışı olarak kalır," dedi Holmes, sönük bir şekilde. "Muhtemelen bambaşka bir şey oluyordur da sen görememişsindir. Ama bunu benden duymadın," diye uyardı.

"Benden laf çıkmaz," diye cevap verdim. Ama kalem ve defterimden çıkar. Sonuçta biyografi yazarlarının da para kazanması lazım.

7

Çift Çözümlü Yapbozlar



Amerika ve Britanya'nın meşhur bulmaca ustaları, sahneyi klasik bir geometri eğlencesi için hazırlıyor: kesimler. Bir altıgeni kesip, elde edilen parçalarla sekizgen yapabilir misiniz? Ya da beş uçlu yıldızın parçalarından bir kare?
Bu işin bazı sırları, uzman kesimcilerden Greg Frederickson tarafından yazılmış harikulade bir kitapta ortaya çıkıyor.

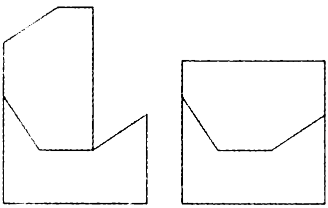
Ünlü bulmacacılardan, biri Amerikan diğeri de İngiliz, Sam Loyd ve Henry Dudeney, daha kariyerlerinin erken aşamalarındayken *Tit-bits* dergisinde düzenli olarak yayımlanacak bir bulmaca köşesi için işbirliği yaptılar. Loyd bulmacaları hazırlar ve Dudeney de ("Sphinx" rumuzu altında) yorumlarda bulunup ödülleri dağıtırdı. İşbirliği çok geçmeden rekabete dönüştü ve bu iki adam yollarını ayırdı. Böyle yaparak da basit ama sürükleyici hikayelerin içine insanla alay edercesine sırıtan sorular yerleştirildiği komple bulmaca endüstrilerini Atlantik Okyanusu'nun iki tarafında da yerleştirmiş oldular.

Yaptıkları işin tipik örneklerinden biri de Loyd'un Sedan Sandalye Bulmacasıdır (Şekil 22a). Matematiksel soru, sedan seklini mümkün olduğunca az parçaya ayırarak, kare oluşturacak şekilde yeniden birleştirmektir; Loyd bu bulmacayı, genç bir hanımefendinin sedan sandalyesinin yağmurdan korunma amacı ile ustaca katlanıp kapatıldığı bir hikaye içinde sunar. Cevap, (Şekil 22b) düzenli, zarif ve zordur.

Bu tür bulmacalar "kesim[1]" olarak bilinir. Ben bunları, birden fazla cevabı olan yapbozlar olarak düşünmeyi tercih ediyorum. Zamanın eskitemediği bu matematiksel eğlencelik üzerine harikulade eğlenceli bir kitap da Greg N. Frederickson'ın *Dissections:Plane and Fancy*'sidir. İştahınızı kabarmak amacıyla,

1- İngilizce, Dissections.





Şekil 22

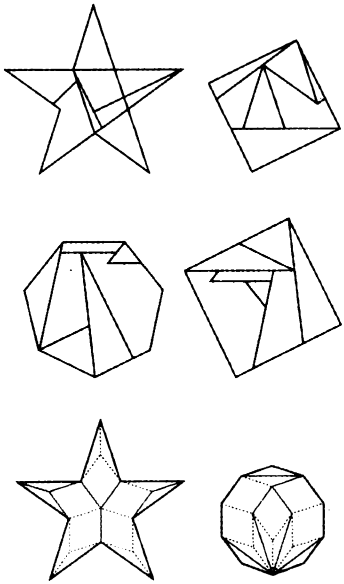
(a) Sam Loyd'un Sedan Sandalye Bulmacası.

(b) Ve çözümü.

dikkatinizi Şekil 23'deki ilginç örneklere çekmek isterim; hepsi Frederickson'ın kitabındandır.

Bütün kesim bulmacalarının altında yatan temel matematiksel kavram alandır. Bir şekil kesilip, bütün parçalarının yeri değiştirildiğinde toplam alanı değişmez. Bu basit ve aslen bariz ifadenin arkasında çok derin bir matematik yatar. Örneğin, "parçaların" özelliklerinin yeterince karmaşık olmasına izin verilirse, ifade üç boyutlu objeler için *yanlıştır.* Ünlü Banach-Tarski Paradoksunda içi dolu bir küre öyle altı parçaya "kesilir" ki bu parçalar birleştirilerek, her biri esas kürenin boyutlarına sahip iki içi dolu küre elde edilebilir. Stefan Banach ve Alfred Tarski, 1924 tarihli bu acayip teoremde işbirliği yapmıştır. Aslında bir paradoks değildir: tamamen akla yatkın, mantıksal olarak doğru bir sonuçtur. Ama o kadar gariptir ki "paradoks" sıfatı üstüne yapışmıştır.

Bu sonuç üzerine daha çok bahis etmeye çekiniyorum çünkü çok bariz bir imkansızlık: nasıl olur da sadece parçaların yerini değiştirerek hacmi iki katına çıkarır? İşin numarası seçilen



Şekil 23

Örnek kesimler.

(a) Phlip Tilson'dan, pentagram-kare dönüşümü.

(b) Gavin Theobald'dan, heptegon-kare dönüşümü.

(c) Lindgren'den, pentagram-düzgün on yüzlü dönüşümü.

parçalarda, o kadar acayipler ki iyi tanımlanabilmiş bir hacimleri yok. Gerçekten de bunları "parça" olarak tanımlamak konuştuğumuz dili istismar ediyor. Zira yekpare bir parçadan çok, sonsuz derecede karmaşık toz bulutlarına benzerler. Bu fikirler *From Here to Infinity* isimli kitabımda özetlenmiş, Stan Wagon'un *The Banach-Tarski Paradox* isimli kitabında da bütün haşmetleriyle açıklanmışlardır (Ek Kaynaklar).

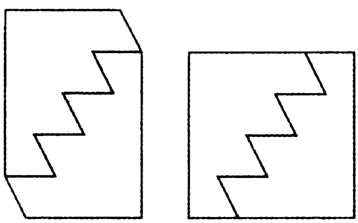
Tabii ki bu teorik kesim işlemini fiziksel dünyada gerçekleştirmenin pratik bir yolu yoktur –böylece değerli metallere para yatıranlar rahat bir nefes alabilirler– ama hacim kavramının ne kadar hilekar olabileceği buradan anlaşılabilir. Matematiksel kurulumunu bile anlatmak birçok sayfa argüman ve birkaç sofistike fikir gerektirir. İlginçtir, düzlem geometrisinde alanların değiştiği "paradoksal" kesimler, Tarski'nin 1925'de ispatladığı üzere parçalar ne kadar karmaşık olursa olsun mümkün değildir.

Fakat bir kürenin yüzeyinde böyle kesimler *yapılabilir.*

Objenin kesildiği parçalar iyi-tanımlanmış alanlara ya da hacimlere sahip olacak kadar nazik olduklarında –ve özellikle de düz kenar ve düz yüzleri olan çokgen ya da çok yüzlüler olduklarında– Banach ve Tarski'ninki gibi önsezi yamultan kurulumlar ortaya çıkmaz. Gerçekten de P. Gerwein (Prusya ordusunda bir teğmen), Macar matematikçi Wolfgan Bolyai'nin kesimler hakkında ortaya attığı temel bir soruyu 1833'de cevaplamıştır. Gerwain şunu ispatlamıştır: alanları birbirine eşit herhangi iki düzlemsel çokgen için öyle bir kesim yapılabilir ki bu kesimin parçaları kullanılarak, söz konusu iki objeden herhangi biri elde edilebilir. Bu sonuç, aslında ilk kez William Wallace tarafından 1807'de ispatlanmış gibi gözükse de geleneksel olarak Bolyai-Gerwein Teoremi olarak bilinir.

Bolyai-Gerwein Teoremi üç boyuta *genellenemez.* 1900 senesinde David Hilbert, aynı hacme sahip herhangi iki çok yüzlünün "kesimler altında denk" olup olmadığını, yani aynı çokyüzlü parçalar kümesi kullanılarak iki çokyüzlünün de kurulup kurulamayacağını sormuştur. Bundan bir yıl sonra Max Dehn, aynı hacme sahip küp ile düzgün dört yüzlünün kesimler altında denk *olmadığını*, hayretler verici bir şekilde ispatlamıştır.

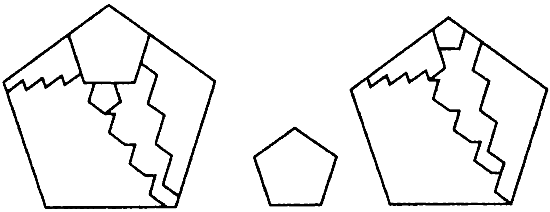
Esas eğlence, tabii ki kesimler altında denk *olan* zarif yada şaşırtıcı örnekler bulmakta. Destekli deneme, yanılma ile bazı ilerlemeler kaydedilebilse de bunun için çok yoğun bir uzaysal hayal gücü gerekli. Çok sayıda kesim sergilemenin yanı sıra, *Dissections: Plane and Fancy*'nin önemli özelliklerinden biri de kesimleri keşfetmek için gerekli olan birçok genel ilkeleri açıklamasıdır.



Şekil 24

Basamak ilkesi.

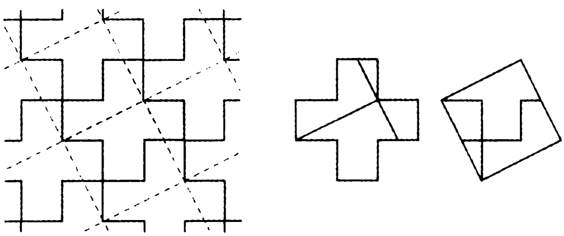
Bunlardan biri de şeklin "merdiven" gibi kesilip bir basamak ötelendiğinde, başka bir şekil elde edildiği "basamak ilkesi"dir (Şekil 24). Loyd da Dudeney de birçok bulmacalarında bu ilkeden yararlanmışlardır. Amerika'da bilgisayar programcısı ve danışman olarak çalışan İngiltere doğumlu David Collison adlı bir "kesim" meraklısı, bu ilkeye dayalı bir takım özenli ve incelikli kesim örnekleri tasarlamıştır. Şekil 25, iyi bilinen "Pisagorsal" eşitlik $5^2+12^2 = 13^2$'yi, Collison'ın bulduğu şekilde pentagon üzerinde kesimlerle ispatlar. Bu örnekte basamak ilkesinin birkaç farklı uygulamasını görebilirsiniz.



Şekil 25

Collison'ın Pisagor kesimi. Büyük pentagonun alanı 169 birim kare iken küçük pentagonların alanları sırayla 25 ve 144 birim karedir.

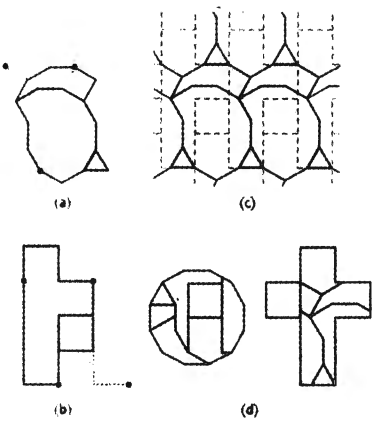
Diğer bir genel yöntem de "döşeme ilkesidir". Döşemelerin, yani düzlemi kaplayan döşeme desenlerinin içine birçok ilginç şekil gömülebilir. Döşemelerden birinin Yunan hacı, diğerinin de kare olduğu Şekil 26, bu duruma basit bir örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 26

Döşeme: Yunan hacından kareye.

Şekil 27 aynı temel fikrin daha cafcaflı bir uygulamasını gösterir. Bu onikigenden Latin hacı kesimi, Harry Lindgren'e aittir ki kendisi *Geometric Dissections*'ın (Ek Kaynaklar) yazarı, dünyaca ünlü bir kesim uzmanıdır. İlk adım –ve en zor adım– onikigeni, nispeten karışık bir döşeme oluşturmak için üç parçaya ayırıp yeniden düzenlemektir (Şekil 27a). Onikigenle aynı alana sahip bir Latin hacıda iki parçaya ayrılabilir (Şekil 27b). Bu geometrik şekillerin ikisiyle de düzlem döşenir (şekil 27c). İki döşemeyi karşılaştırarak Şekil 27d'deki kesime varılır.



Şekil 27

Lingren'dan, onikigen-Latin hacı dönüşümü.

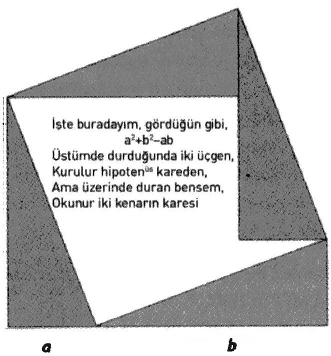
(a) Onikigeni 3 parçaya ayırıp, döşeme oluşturacak şekilde yeniden düzenleyin.

(b) Latin hacını kesin.

(c) Düzlemi iki şekilde üst üste kaplayın.

(d) İki döşemeyi karşılaştırmak, onikigen-Latin hacı dönüşüm kesimini ortaya çıkaracaktır.

Döşeme ilkesinin bir başka türevi de British Astronomer Royal[2] olarak 1836'dan 1881'e kadar hizmet vermiş olan George Biddle Airy'nin yayımladığı, Pisagor Teoremini ispatlayan kesimdir (Şekil 28). Küçük şiir Airy'ye ait.

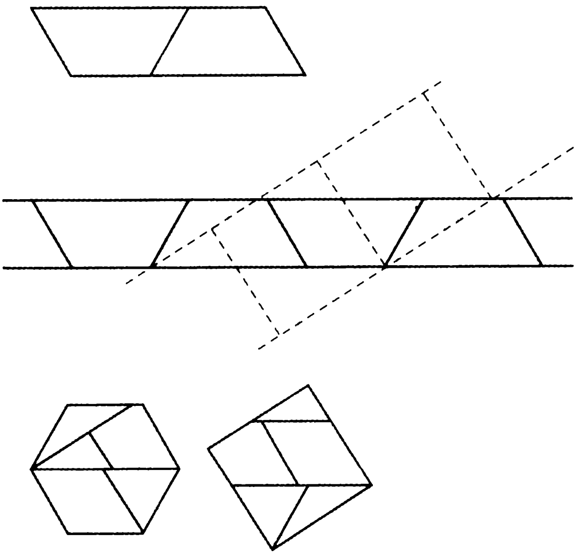


Şekil 28

Airy'nin Pisagor kesimi.

2- Biritanya kraliyet ailesi tarafından verilen, şimdilerde onursal bir ünvan.

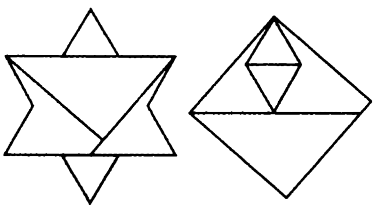
Genel olarak uygulanan üçüncü bir yöntem da şerit ilkesidir. İki şekil, kendi içlerinde sonsuz uzun bir şeridi döşeyebilecek parçalara ayrılır. Şeritler bu kaplama işleminden sonra üst üste bindirilirse ortaya bir kesim çıkar. Şekil 29'da, Paul Busschop'ın altıgen-kare kesimine, şerit ilkesinden nasıl varılabileceği gösterilmiştir. Busschop, şimdilerde solo test olarak bildiğimiz oyun üzerine kitap yazmış bir Belçikalıdır. Kitap, erkek kardeşi tarafından yazarın ölümünden sonra, 1879 yılında yayımlanmıştır. Şekil 30'daki Davud yıldızı-kare kesimi de aynı yöntemle elde



Şekil 29

Busschop, altıgen-kare kesimi.

edilebilir. 1897 yılında, MIT'de eğitmen olarak çalışmış Harry Bradley tarafından icat edilmiştir.

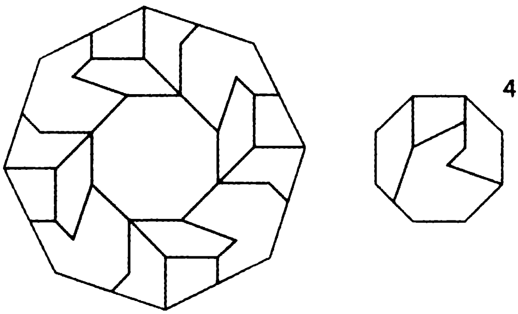


Şekil 30

Bradley'den, Davud yıldızı-kare kesimi.

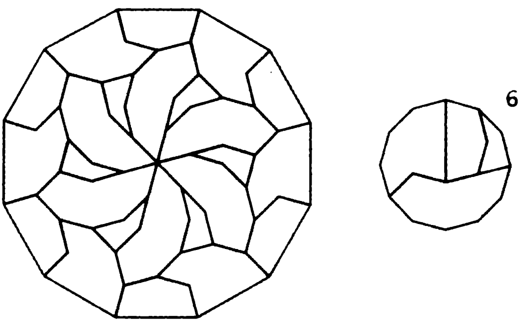
Kesim bulmacaları, sadece bir şekli başka şekle döndürmek ile sınırlı değildir. Sıklıkla, bir küme şeklin kesilip farklı farklı birleştirilmeleri gerekir. Şekil 31'de bu duruma iki örnek gösterilmiş: dört adet sekizgenden bir taneye ve altı adet sekizgenden bir taneye dönüşüm.

Kesimler o kadar zorlayıcı olabilir ki insanlar arada sırada göz yanılmasına düşebilirler. Loyd, 1901 yılında mitre[3]-kare kesimini yaptığını iddia ederek (Şekil 32a), akıllarda yer edinmiş ve Frederickson tarafından "belki de en büyük sakarlığı" olarak ifade edilmiş bir hataya düşmüştür. Maalesef, söz konusu "kare", aslında kenar oranları 49:48 olan bir dikdörtgendir. İroniktir, Loyd bu bulmacaya, Akıllı Alec Bulmacası ismini vermiştir. Rakibi Dudeney, 1911 senesinde hataya dikkatleri çeker ve doğru kesimi de verir, Şekil 32b. Yani, eğer siz de kendi kesimlerinizin



Şekil 31

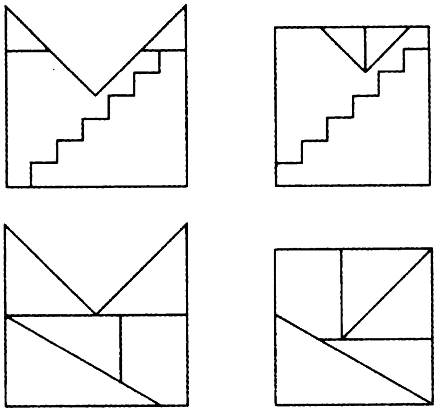
(a) Dört sekizgenden bir sekizgene.



(b) Altı sekizgenden bir sekizgene.

3- Çeyreği çıkarılmış kare.

peşine düşmek isterseniz bir çok ailenin çocuklarına verdikleri nasihata dikkat edin: "Eğlenmene bak –ama dikkatli ol."



Şekil 32
Mitre kesimi

(a) Loyd'un hatası.

(b) Dudeney'in düzeltmesi.

8

Hor Görülmüş Bir Sayının Hikayesi



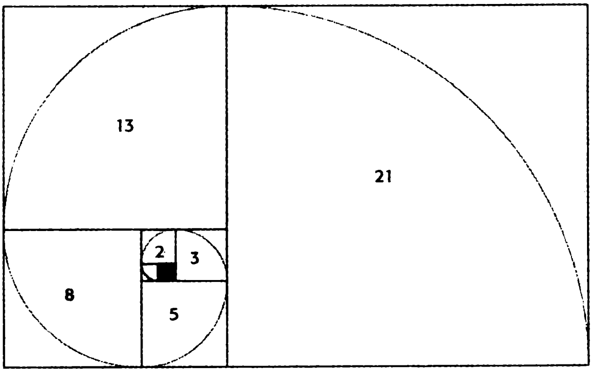
Meşhur "altın sayı" 1,618034, eğlence ve dinlence amaçlı matematiğin ayrılmaz bir unsurudur ve ananaslar, spiraller, tavşan nüfusunun eksponansiyel büyümesi üzerine 800 yaşında bir problem de dahil, birçok yerde ortaya çıkar. Biz; daha az bilinen ama en az yakın akrabası (altın sayının, tavşanların değil) kadar ilginç, mimar Richard Padovan'ın "plastik sayı" dediği, 1,324718 sayısıyla ilgileneceğiz.

Alan St. George, ünlü "altın sayıyı" sık sık kullanan, matematiksel bir heykeltıraştır. 1995-6 yıllarında bazı eserlerini sergilemiş ve sergisinin kataloğunda, daha az ünlü olan "Plastik sayının, Mimar Richard Padovan tarafından ortaya çıkarılan" şanından şöyle bahsetmiştir. "Plastik sayının kısa bir tarihi vardır ki bu, görsel tasarıya yardımcı bir alet olduğu düşünüldüğünde ilginçtir. Ama matematikteki kökeni en az altın kuzeni kadar saygıdeğerdir... Doğada çok fazla gözlemlenebilirmiş gibi durmamaktadır ama hiç kimse de onu, özellikle doğada aramamıştır."

Durumu ilginç bulduğumdan bu merak uyandırıcı ve az bilinen sayı hakkında daha fazla bilgi edinmeye karar verdim. Sanıyorum ki bu sayı birden fazla defa keşfedilmiş ve muhtemelen de farklı farklı isimleri var.

Karşılaştırma amacıyla ilk önce altın sayı ϕ'yi incelememe izin verin. (Fevkalade bir kaynak, Mario Livio'nun Ek Kaynaklarda bahsi geçen kitabıdır.) Bu sayı, $\phi = 1{+}1\phi$ denklemini sağlar ki bu da yaklaşık $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618034$ değerinde olduğunu gösterir. Altın sayı beşgenlerin geometrisiyle yakından alakalıdır –bir beşgenin köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranıdır– ve bu yüzden, onikigen ve düzgün yirmi yüzlü ile de alakalıdır. Meşhur Fibonacci sayıları ile yakın bağları vardır. Bu bağıntıyı görmek için Şekil 33'e, bir spiral içindeki kareler düzeneğine bakınız. Başlangıç karesinin (siyah ile işaretlenmiş) ve hemen ya-

nındaki karenin kenar uzunluğu 1'dir. Sonra, ilk ikisinin üstüne tam otursun diye, kenar uzunluğu 2 olan bir kare eklenir, şimdi de kenar uzunluğu sırayla 3, 5, 8, 13, 21 olan kareler gelir. Bunlar, her biri kendinden önceki iki sayının toplamı olan, Fibonacci sayılarıdır. Söz konusu özellik, şekil üzerinde de gözlemlenebilir; mesela kenar uzunluğu 21 olan karenin sol kenarı, 8 ve 13 kenar uzunluklarına sahip karelerin hemen yanındadır.



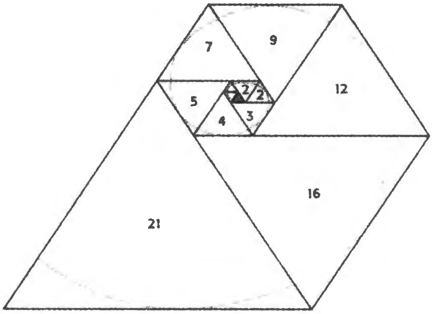
Şekil 33 Fibonacci sayılarından kareler spirali.

Ardışık Fibonacci sayılarının oranı altın orana doğru yakınsar. Örneğin, 21/13 = 1,615384. Bu sonuç, Fibonacci sayılarını oluşturmak için kullanılan kural ve denklemden çıkar. Şekil 33'de her kare bileşeninin içine çeyrek çember yerleştirdim ki bunlarda birleşerek, notilusun[1] kabuğunda olduğu gibi, doğada sıklıkla bulunabilecek sözde "logaritmik spirale" iyi bir yakınsama sağlar. Spiralin döngüleri, altın sayıya yakın bir değerde büyür.

İşte altından hikayemiz böyleydi, şimdi sıra plastikten hikayede. Şekil 33'e çok benzeyen ama eşkenar üçgenlerden oluşan bir diyagram ile başlıyoruz (Şekil 34). Başlangıç üçgeni siyah ile işaretlenmiş ve sonrasında gelen ardışık üçgenlerde saat yönünde spiralleniyor: gösterilen spiral yine logoritmikliğe yakınsar. Biçimlerin birbirine uyumlu bir şekilde yerleştirilebilmesi için ilk üç üçgenin kenar uzunluğu 1 alınır. Sonraki iki tanesin kenar uzunluğu 2 ve sonra da sayılar 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 diye gider.

1- Notilus, kabuğu salyangozunkine benzeyen deniz canlısı.

Yine, Fibonacci sayılarınkine benzeyen basit bir dizilim kuralı vardır: şimdi sıradaki sayı, Fibonacci'nin formülünden *bir* kaya-



Şekil 34 Üçgenler sipirali padovan sayılarını oluşturur.

rak, kendisinden iki önceki ve üç önceki iki sayının toplamıdır. Örneğin 12=7+5, 16=9+7, 21=12+9. Yine bu kural üçgenlerin geometrisi ve onları konumlandırabilmek için yapılması gerekenlerden basitçe çıkar. Bu diziye, Richard Padovan'ı onurlandırarak, *Padovan dizisi* dememe müsaade edin.

Aslında bu diziyi kendisi bulmadığından (ya da çözmediğinden), tam da bunu yapmamamı rica etmişti ama düşünürsek, Pell de Pell denklemlerini icat etmedi (veya çözmedi) ve Bolyai ile Gerwein, Bolyai-Gerwein Teoremini ilk çözen kişiler değillerdi. Göreceksiniz ki iyi bir sebebim var –bir İtalyan şakası. Ayrıca insanlar, fikirlerin üzerine *ilgi çektikleri* için övgüyü hak ederler. Haliyle, Richard'a büyük ve kalpten özürlerimle beraber, tarihsel açıdan kusurlu terminolojimi mevcut hali gibi kullanacağım. Söz konusu yazarlık oldu mu, başa gelen çekilir.

İlginçtir, "Padova" İtalya'da bir şehir, Fibonacci de İtalyan, Pisalı, Pisa da Padova'ya yaklaşık 100 mil mesafede. Söylenenlere göre "Fibonacci", "Bonaccio oğlu" demek; yine de kendisinin esasen kullandığı isim "Pisa'lı Leonardo"dur ve günümüzde daha çok bilinen rumuzu, ondokuzuncu yüzyıldan önce icat edilmiş gibi görünmemektedir. İtalyan coğrafyasının konumuz üzerine kattığı aromayı korumak adına Fibonacci sayılarının ismini "Pisa dizisi" olarak değiştirmeyi şiddetle arzuluyor olsam da arzuları-

ma gem vurmayı başarıyor ve geleneksel terminolojiyi kullanmakla yetiniyorum.

Fibonacci dizisi $F(n)$ ve Padovan dizisi $P(n)$'nin ilk 20 terimi Tablo 1'de listelenmiştir. Sayıların gerilmesiyle ilgili cebirsel kurallar

$F(0) = F(1) = 1$ olduğu durumda $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

$P(0) = P(1) = P(2) = 1$ olduğu durumda $P(n+1) = P(n-1) + P(n-2)$

şeklindedir ki bu da aralarındaki benzerliği gözler önüne sermektedir. Tablo, "Perrin sayıları" $A(n)$'yi de içermektedir, onlara daha sonra değineceğiz.

Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin, 8/5, 13/8, 21/13 şeklinde giden oranlarını alıp hangi sayıya doğru yaklaştıklarını araştırsanız, limitlerinin altın sayı olduğunu görürsünüz. Örneğin, 21/13=1,6153, 34/21=1,6190 ve 9790/6051=1,6179'dur. Bunu ispatlamanın kolay yolları var. Benzer sebeplerden ötürü, bu noktadan sonra kendisine p olarak hitap edeceğim, yaklaşık değeri 1,324718 olan plastik sayı da ardışık Padovan sayılarının oranlarının limiti olarak ortaya çıkar. Haliyle, 200/141 = 1,3245. Padovan sayılarının kurulum kurallarından, $p+1/p+1/p^2$ ya da

Tablo 1

n	$F(n)$	$P(n)$	$A(n)$	n	$F(n)$	$P(n)$	$A(n)$
0	1	1	3				
1	1	1	0	11	144	16	22
2	2	1	2	12	199	21	29
3	3	2	3	13	343	28	39
4	5	2	2	14	542	37	51
5	8	3	5	15	885	49	68
6	13	4	5	16	1427	65	90
7	21	5	7	17	2312	86	119
8	34	7	10	18	3739	114	158
9	55	9	12	19	6051	151	209
10	89	12	17	20	9790	200	277

denk olarak $p^3-p-1 = 0$ eşitliği çıkar. p sayısı bu denklemin yegane reel çözümüdür.

Padovan dizisi Fibonacci dizisinden çok daha yavaş artar çünkü p sayısı ϕ'den ufaktır. Padovan dizisinde birçok ilginç desen bulunabilir. Örneğin, Şekil 34'de gösterildiği üzere kom-

şu kenarları boyunca üçgenlerin birbiriyle uyumlu olması için 21=16+5, 16=12+4, 12=9+3 gibi eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bu da bize, dizinin ileri terimlerinin bulmamızda yardımcı olacak başka bir kural olan P(n+1) = P(n)+P(n–4) eşitliğini verir.

Yukarıda bahsi geçen eşitlikle ilgili olarak, p= $1+1/p^4$ ya da $p^5-p^4-1 = 0$ eşitliğinin sağlanması şarttır –ve üçüncü bir dereceden denklemin çözümü olan p'nin aynı zamanda bu *beşinci* dereceden denklemi de sağlamak zorunda olduğunu cebir kullanarak pek rahat gösteremezdik. Bu durumun altında yatan sebebi araştırmak isteyebilirsiniz.

Makalenin esasen yayımlandığı köşemde 3, 5 ve 21 sayılarının hem Fibonacci hem de Padovan olduklarını belirtip, bunlara benzer başka sayılar olup olmadığını sormuştum. Eğer başkaları varsa, kaç tane vardı: sonlu mu sonsuz mu? Benjamin de Weger (Ek Kaynaklar), bariz durumlar olan 0, 1 ve 2 ile beraber bu sayıların, hem Fibonacci hem de Padovan olan *yegane* sayılar olduklarını ispatlamıştır. Ben ayrıca, 9, 16 ve 49 gibi bazı Padovan sayılarının tam kare olduğunu belirtip, başkaları olup olmadığını sormuştum. Ne kadar çok vardı? Bu durumdaki tam karelerin kökleri 3, 4 ve 7'de Padovan sayılarıdır. Bu bir tesadüf müdür, yoksa genel geçer bir kural mıdır? Üzerlerinde yapılacak daha derin çalışmaları hak etmekle beraber, bu sorular hala daha çözülememişlerdir.

Padovan sayılarını üretmenin bir başka yolu da kareler yerine prizmalar –dikdörtgen yüzlü üç boyutlu objeler– kullanarak Fibonacci sayılarındaki kare kullanımını taklit etmektir. Şimdi elde edeceğimiz şey bir çeşit üç boyutlu prizma spiralidir. Daha detaylı anlatmak gerekirse, her kenarı 1 birim uzunlukta bir prizma ile başlayıp hemen yanına aynısından bir tane daha koyun. Sonuçta elde edilen, 1x1x2 boyutlarında bir prizmadır ve 1x2 yüzüne bir tane daha 1x1x2 ekleyelim, elde var 1x2x3'lük prizma. 2x2 yüzüne, 2x2x2'lik bir küp ekleyelim ve böylece 2x2x3'lük bir prizma yaratmış olalım. 2x3'lük yüzlerden herhangi birine 2x2x3'lük ekleyerek 2x3x4 elde edelim ve böylece devam etsin. Bu devamlı yeni prizmalar ekleme süreci, doğu, güney, aşağı, batı, kuzey, yukarı şeklinde genişler. Her adımda

oluşturulan yeni prizmanın kenar uzunlukları, ardışık üç Padovan sayısı olacaktır.

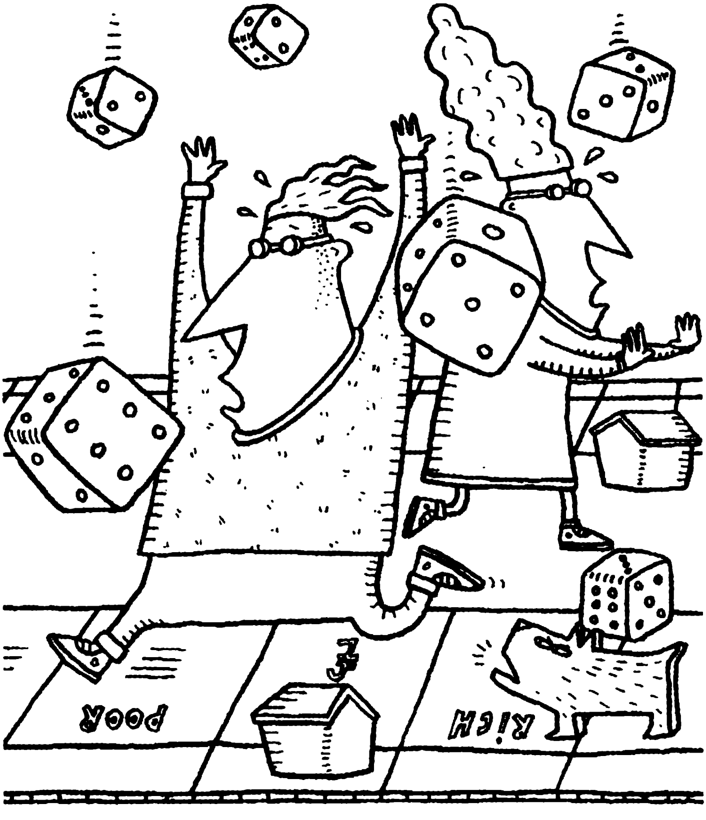
Fransız matematikçi Edouard Lucas 1876 yılında, Padovan sayılarıyla aynı kurulum kurallarına sahip ama farklı başlangıç değerleri kullanan bir sayı dizisini incelemiştir. Fikirleri 1899 yılında R. Perrin tarafından geliştirilmiştir ve bu sayılar günümüzde *Perrin dizisi A(n)* olarak bilinmektedir. Perrin sayıları, Padovan sayılarından şu sebeple ayrılır, $A(0)=3$, $A(1)=0$, $A(2)=2$: değerler tabloda da karşılaştırılmıştır. Yine, ardışık Perrin sayılarının oranı *p*'ye yakınsar ama Lucas daha değerli bir özellik fark etmiştir. *n* bir asal sayı (kendisi ve 1'den başka böleni olmayan sayı) ise *n*, A(n)'yi tam böler. Örneğin 13 asal bir sayıdır, $A(13)=39$ ve $\frac{39}{13}=3$. Benzer şekilde 19 asal bir sayı, $A(19)=209$ ve $\frac{209}{19}=11$.

Bu teorem bir sayının bileşik (yani asal olmayan sayı) olup olmadığını kontrol etmek için ilginç bir test sunar. Örneğin $n = 18$ ise elimizde $A(18) = 158$ ve $158/18 = 8{,}777$ vardır ki o da tam bir sayı değildir. Haliyle 18 bileşik olmak zorundadır. Yani, Perrin sayılarını anti-asallık kontrolünde kullanabiliriz: *A*(*n*)'yi bölmeyen herhangi bir *n* sayısı bileşiktir. Bu testin ilginç özelliklerinden birisi de, *n*'nin bileşikliğini kontrol etmesine rağmen herhangi bir bölenini sunmamasıdır ki bu yöntem bir sayının asal olmadığını kontrol etmenin en ilkel şeklidir. Tabii ki biz burada $18=1\times3\times3$ olduğunun farkındayız ama daha büyük sayıların bölenleri bu kadar açık olmayabilir: ve yine de *A*(*n*)'yi *n*'ye bölerek ne elde edebileceğimizi kontrol edebiliriz.

Peki, *n*'nin *A*(*n*)'yi bölmesi, *n*'nin asal olduğu manasına gelir mi? Lucas'ın teoreminden böyle bir sonuç, "yağmur yağarsa ıslanırım"dan, "ıslanırsam yağmur yağıyordur"un çıkmayacağı gibi (muhteşem güneşli bir günde bir dereye düşebilirim), çıkmaz. Ve aslına bakarsanız cevap da "hayır". Jeffrey Shalit (Waterloo Üniversitesi) 1982 yılında, ilişkili oldukları Perrin sayısını bölen iki adet bileşik sayı, isim vermek gerekirse –271.441 ve 904.631– bulmuştur. Daha sonra bir üçüncüyü, 16.532.714'ü de bulmuştur. Asallık için, ardışık üç Perrin sayısına bağlı daha karmaşık bir test bulunmuş olup, herhangi bir istisnası bilinmemektedir.

9

Monopoly Adil midir?



Kira geliri yok, bankaya borç diz boyu, bütün finansal geleceğiniz bir zar atışına bağlı... Tıpkı dotcom krizindeki borsaya benziyor. Ama tabii ki Monopoly'den bahsediyoruz. Monopoly'nin bir oyun olduğuna şüphe yok –peki, Monopoly matematiksel bir oyun mudur? Bu konu üzerine işlediğimiz iki başlığın ilkinde ispatlamayı hedeflediğimiz üzere, gerçekten de öyledir. Bu ısınma turunda, gerçek oyunla çalım atmayacak, –sadece basitleştirilmiş bir haliyle uğraşacağım. Daha kanlı detaylar için bir sonraki bölüme bakınız.

Şans, strateji ve kıyasıya ekonomik rekabet üzerine kurulmuş, dünyadaki en ünlü masaüstü[1] oyun Monopoly'i oynamamış bir aile bulmak çok zor olsa gerek. Bu ve buna benzer bütün masaüstü oyunlarının altında yatan oldukça derin bir matematik vardır: olasılık kuramcılarının Markov zinciri dedikleri, böyle şeyler üzerine 1900'lerin başlarında genel bir teori icat etmiş Andrey Andreyevich Markov isimli Rus matematikçiden ismini alan, matematiksel bir yapı.

Size Monopoly'nin bütün kurallarını tekrarlayacak değilim ama oyuncuların sırayla bir çift zar attıklarını ve gelen zar değerinin kaç kare ilerleyebileceklerini belirlediğini bilmemiz lazım. Eş zar atanların tekrar zar atmaya hakları olduğuna dair bir kural da vardır (ama eğer üç kez üst süte çift atarlarsa hapse giderler) var olmasına da elimizdeki problemi basitleştirmek adına yapacağım tek şey bu kuralı görmezden gelmek olacaktır. Böyle bir basitleştirmeyi kabul etmezseniz yapmanız gereken inceleme ve çıkarımlar (kısaca matematik) burada yapılanlara çok benzer olsa da daha karmaşık olacaktır –ki basitleştirilmiş haliyle bile yeterince karmaşıktır.

Oyuncular "Başlangıç" karesinde oyuna başlar. İki zar ile oynanan herhangi bir oyun oynamış herkesin bildiği üzere, bazı zar toplamlarının gelme ihtimali ötekilerden daha fazladır. As-

1- "Kutu oyun" olarak da bilinir.

lında, gelme 1/6'lık ihtimalle gelmesi en muhtemel toplam 7'dir. İhtimalin 1/6 olmasının sebebi toplamı 7 olan 6 tane zar çifti olmasıdır ki bunlar, 36 muhtemel zar çifti arasından, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, ve 6+1'dir. Haliyle toplamda 7 gelme ihtimali 6/36=1/6'dır. Bir sonra 6 ve 8 gelir (olasılıkları 5/36), sonrada 5 ve 9 (olasılıkları 4/36=1/9), 4 ve 10 (olasılıkları 3/36=1/12), 3 ve 11 (olasılıkları 2/36=1/18) ve en son olarak, 2 ve 12 (olasılıkları 1/36). Bu da demek oluyor ki ilk oyuncu büyük ihtimalle (birçok oyun oynandığında) yedinci kareye düşecek gibidir ki o da bir Şans karesidir –yani Şans destesinden bir kart çekip üzerinde yazanlara harfiyen uymaları gerekir. Yine, yaptığımız tetkikleri daha basite indirgemek adına, kart üzerinde yazanların *uygulanmadığını* farz etmekle işe başlayacağım. 7. Kutudaki şans karesinin yanı başında, Sultanahmet (Amerikan sürümünde Oriental Avenue) ve Karaköy (Vermont Avenue) bulunur. Yani, ilk oyuncunun bu iki arzu edilebilir mülkleri sahiplenme şansları oldukça iyidir ve bu durumda, sonraki oyuncuların mülk sahibi olma ihtimalleri azalır.

Şüphe yok ki oyunun tasarımcılarının düşük kiralı, ucuz mülkleri başlangıca yerleştirme sebepleri de budur. Esas pahalı ama iyi gelir getiren Tarabya (Park Place) ve Yeniköy (Boardwalk) karelerinin tahta üzerinde birkaç tur ileriye yerleştirmelerinin sebebi de budur ki o vakte kadar –muhtemelen– olasılıkların eşitlendiği düşünülür.

Peki, gerçekten de eşitlenmiş midir?

Bu sorunun iki hali vardır. İlki, esas oyuna ciddi değişiklikler yapılmadan uygulanamayacak olan basitleştirilmiş hali olup, Markov zinciri yaklaşımının faziletlerini, kolaylıkla çözülebilecek denklemler aracılığıyla gösterir. İkincisiyse, gerçek oyun için sunulan gerçek sorudur ki birçok karışıklık içerir; buradan da Markov zinciri çıkmasına rağmen, yapılması gereken hesapların uzunluğundan dolayı bir bilgisayar gereklidir. Bu bölümde basitleştirilmiş hali ile uğraşıp, genel ilkelere bir açıklık getirdikten sonra, gerçek işe bir sonraki bölümde girişeceğim. Ha, bir de parantezli çevirilerden kurtulmak amacıyla, alın size iki

ayrı memleketteki kare isimlerini sıralayan bir tablo. (Bu oyunun, muhtemelen yüzlerce farklı ulusal hali vardır, bir de medya ürünleriyle alakalı olanlar var –hepsini sıralayacak yer yok.)

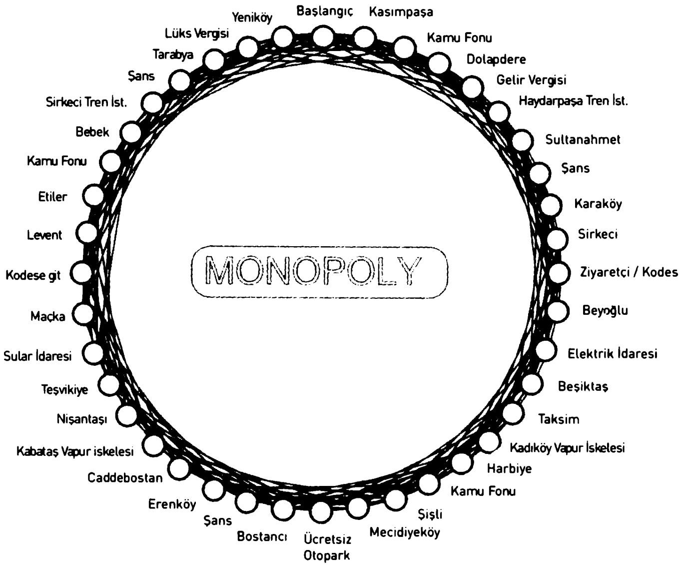
Kendi sorduğum sorunun basitleştirilmiş halini çözmek amacı ile bir tane daha basitleştirme sunuyorum. İki zarı aynı anda attığımı düşünmek yerine, zarları tek tek –sırayla attığımı düşüneceğim. Bu bakış açısında, her oyuncu iki adet hareket yapar: bir ilk "hayalet" hareket –ki bu hareket ile üzerine geldikleri karede yazanları görmezden gelirler– ardından da ikinci bir "gerçek hareket". Merakımız ihtimallerin akışında yattığından ve Şans ile Kamu Fonu karelerinde olanları

Tablo 2

Türk	Amerikan	Türk	Amerikan
BAŞLANGIÇ	GO	ÜCRETSİZ OTOPARK	FREE PARKING
KASIMPAŞA	MEDITERRANEAN AVE	BOSTANCI	KENTUCKY AVE
KAMU FONU	COMMUNITY CHEST	ŞANS	CHANCE
DOLAPDERE	BALTIC AVE	ERENKÖY	INDIANA AVE
GELİR VERGİSİ	INCOME TAX	CADDEBOSTAN	ILLINOIS AVE
HAYDARPAŞA TREN İST.	READING RAILROAD	KABATAŞ VAPUR İSKELESİ	B&O RAILROAD
SULTANAHMET	ORIENTAL AVE	NİŞANTAŞI	ATLANTIC AVE
ŞANS	CHANCE	TEŞVİKİYE	VENTNOR AVE
KARAKÖY	VERMONT AVE	SULAR İDARESİ	WATER WORKS
SİRKECİ	CONNECTICUT AVE	MAÇKA	MARVIN GARDENS
ZİYARETÇİ / KODES	JUST VISITING/IN JAIL	KODESE GİT	GO TO JAIL
BEYOĞLU	ST CHARLES PLACE	LEVENT	PACIFIC AVE
ELEKTRİK İDARESİ	ELECTRIC COMPANY	ETİLER	NORTH CAROLINA AVE
BEŞİKTAŞ	STATES AVE	KAMU FONU	COMMUNITY CHEST
TAKSİM	VIRGINIA AVE	BEBEK	PENNSYLVANIA AVE
KADIKÖY VAPUR İSKELESİ	PENNSYLVANIA RLRD	SİRKECİ TREN İST.	SHORT LINE
HARBİYE	ST JAMES PLACE	ŞANS	CHANCE
KAMU FONU	COMMUNITY CHEST	TARABYA	PARK PLACE
ŞİŞLİ	TENNESSEE AVE	LÜKS VERGİSİ	LUXURY TAX
MECİDİYEKÖY	NEW YORK AVE	YENİKÖY	BOARDWALK

görmezden geleceğimiz için oyundaki hareketlerimizi iki parçaya ayırmaya hakkımız var.

Şekil 35'de bir matematikçinin, aşağıda açıklanan kurallar uyarınca oyunu nasıl algıladığını gözlemleyebilirsiniz. Çizgiler kareleri (balonlarla temsil edilenler), saat yönüne doğru önlerindeki altı kare ile bağlar. Bu diyagramı, oyunun nihai adilliği hakkındaki en basit soruları cevaplamak için kullanacağım:



Şekil 35 Matematikçilerin Monopoly tahtasını (tabii, basitleştirilmiş halini) algılayışı.

Yüksek sayıda zar atıldıktan sonra, her karenin ihtimali eşit midir? Daha biraz önce bunun, ilk oyuncunun sırasından sonra (bir sıra iki zar atışı, biri hayali diğeri gerçek) doğru *olmadığını* gördük. Bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere bu, yüksek sayıda zar atımından sonra bile, gerçek oyunda da doğru değildir.

Rahatlık açısından kareleri, 0=Başlangıç olacak şekilde 0'dan 39'a sayılandırıyoruz. Böylece 40. kare "dönüp dolaşıp" yine 0. kareye gelmiş oluyor ve biz de sayıların modulo 40 sayıldıklarını düşünebiliyoruz ki bu da 39'dan büyük herhangi bir sayının 40'a bölümünden kalanı ile değiştirilebildiği anlamına geliyor. Şimdi, tek bir oyuncunun, bir tek zarı tekrar tekrar atarak, buna uygun şekilde sürekli hareket ettiğini düşünelim. Anahtar soru şu ki: belirlenmiş bir karenin üzerine belirlenmiş bir sayıda zar atışından sonra gelmenin ihtimali nedir? Umudumuz, zar atışı sayısı çoğaldıkça, belirli *herhangi* bir karenin üzerine gelme ihtimalinin 1/40'a yaklaşması. Yani, hepsinin ihtimali (neredeyse!) aynı olmalı.

Bu olasılıkları hesap etmenin yolu, atılan zar sayısı yükseldikçe olasılıkların dağılımının nasıl bir "akım" halinde olduklarını incelemekten geçer. Her dağılım, sırayla 0, 1, 2, ... , 39 karelerinin ihtimalini gösteren 40 elemanlı bir sayı dizisi ile ifade edilebilir. Oyunun başında, oyuncunun 0. (Başlangıç) karede bulunma ihtimali 1'dir (yani her zaman). Haliyle olasılıkların dağılımı şöyledir

1, 0, 0, 0, ... , 0

ki 0. karede 1 ve diğer 39 karede 0 ihtimal görülür.

Zar tek bir (hayali) atılımından sonra dağılım şu hali alır

0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 0, ... , 0.

Yani, 1, 2, 3, 4, 5, 6 karelerinden her birinin üstüne gelinme ihtimali 1/6'dır ve diğerlerinin üstüne gelinemez.

Dikkatinizi çekmek isterim ki 0 numaralı kare üzerinde 1 olan olasılık altı eşit parçaya bölünmüş ve bu parçalar da 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 numaralı kareler üzerinde dağıtılmıştır. Bu tamamen genelleştirilebilir bir prosedürdür. Zar her atıldığında, eldeki herhangi bir kare üzerindeki ihtimal altıya bölünür ve bu altı parça o karenin önündeki altı karenin üzerine akar. Haliyle bir sonraki zar atışında 1 numaralı kare üzerindeki 1/6 olasılık şöyle dağılır:

0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36,0, ... , 0.

2-6 numaralı kareler üzerindeki 1/6'larda aynı şekilde dağıtılır ama başlangıç yerleri farklı olduğu için her seferinde bir basamak kaymış olarak çıkarlar:

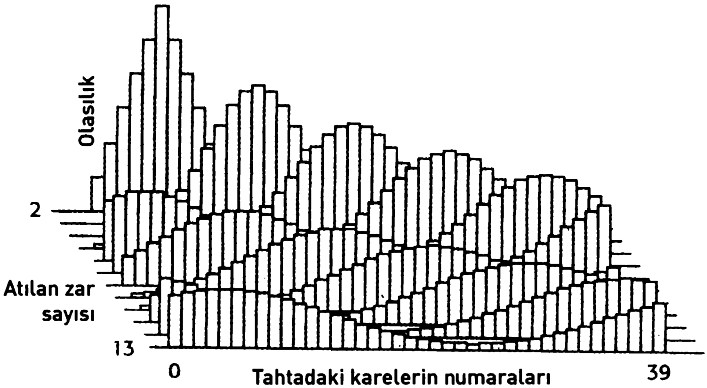
0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, ... , 0.
0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, ... , 0.
0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, ... , 0.
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, ... , 0.
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, ... , 0.

Sonunda da her bir kare üzerine dağılan olasılıkları toplarız. Örneğin, 6 numaralı kare (yukarıdaki her dizide yedinci terim) ilk beş dizinin her birinden 1/36 alır ama son diziden 0 gelir, yani toplamda 5/36. Son sonuçlar şöyle:

0, 0, 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36, 0, ... , 0.

Bu da bizim iki zar atışındaki beklentilerimiz ile uyuşur.

Ama şimdi devam edebiliriz. Üçüncü (hayali) zar atışında, biraz önce hesapladığımız dizi üzerindeki bütün terimleri 1/6 ile çarpıp, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 terim kaydırıyoruz. Sonra da her karedeki sayıları toplayarak, üç zar atışı sonrası oluşan olasılık dağılımını buluyoruz. Sonuçlar, ikinci atışta oluşan "üçgensel" dağılımdan itibaren, Şekil 36'da grafiksel olarak ifade edilmiştir. Atılan her yeni zar ile olasılık grafiği bir adım ilerler. Olasılık zirvesinin her bir adımda birkaç kare (aslında ortalama olarak 3,5 kare, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarının aritmetik ortalaması) sağa ilerlediğini görebilirsiniz.



Şekil 36 40 kare üzerindeki olasılık dağılımı ve yeni bir zar atıldığında oluşan değişim. Her bir çubuğun yüksekliği, ilgili kare üzerine gelme olasılığını gösterir; 2-13 arası zar atışları üç boyut kullanılarak, arkadan öne doğru istiflenmiştir.

Başlangıçta görülen üçgensel suret, daha yumuşak hatlı ve yayvan bir hal almaya başlar. 13 zar atışından sonra bile dağılım hiçbir şekilde düzenli sayılamaz ama şekilde gösterilen gidişat böyle devam ederse, zirveler eninde sonunda düzleşecek ve bütün değerler neredeyse aynı olacaktır. Eğer bilgisayar simülasyonunu devam ettirecek olursanız, gerçekten de sonuçların birbirine yaklaştığını görürsünüz. Ama simülasyonun *neden* böyle bir sonuç verdiğini kavrayabilmek hoş olurdu.

Buradaki yaklaşımlardan biri, fiziksel önsezilere başvurmaktan geçer. Şekil 35'e geri dönün ve olasılıkların bir elektrik yüküyle ifade edildiğini hayal edin. Toplamda 1 olan elektrik yükü, oyunun başında 0 karesinde toplanmıştır. Zar her atıldığında, bütün karelerdeki yükler altıya bölünür ve bu yükler şekildeki çizgiler üzerinden ilerlerindeki altı kare üzerine akar. Böyle bir elektrik akımının eninde sonunda eşsiz bir durgunluk haline gireceği beklentisi içerisindeyiz –ve bu durgunluk halinin nasıl bir yapıya sahip olduğunu, resmin simetrisine bakarak çıkartabiliriz. 40 köşeli bir çokgenimiz var ve akım çizgileri, hangi köşe üzerine yoğunlaşırsanız yoğunlaşın, aynıymış gibi durmakta. Yani bütün resim, çokgenin döndürülmeleri altında simetrik. Haliyle daha önce bahsettiğimiz, eşsiz durgunluk hali de bütün bu döndürmeler altında simetrik olmalı. Ama buradan, her köşedeki durgunluk hali yükünün eşit olmak zorunda oluğu çıkar ve toplam yük korunacağından, her bir köşe üzerinde 1/40 yük elde etmemiz gerekir. Yükü tekrar olasılık olarak ifade etmeye dönersek de olasılıkların, her kareye 1/40 düşen bir dağılım ile durgunluk haline doğru ilerleyeceğini görürüz.

Ama bu akıl yürütmece, her ne kadar mantıklı olsa da tam bir kanıt sunmaz. Olasılıkların akımını takip etmenin simetrik bir yöntemini sunan, Markov'un teorisine de işte burada ihtiyacımız var. İşleme, Şekil 35'deki ağ için "hareket matrisi" denen, satır ve sütunları 0'dan 39'a numaralandırılmış 40x40'lık bir tabloyu hazırlayarak başlarız. Bu tablonun r satır-c sütununa, r karesinden c karesine bir seferde hareket edebilmenin olasılığı yazılır. Eğer c = r+1, r+2, ..., r+6 (mod 40) eşitliği sağlanıyorsa bu olasılık 1/6'dır ve diğer her durumda da 0'a eşittir. Bu hareket matrisine M diyelim.

Şimdi M kullanılarak yapılması gereken teknik bir hesap var ki onu aşağıdaki kutucukta inceliyoruz ama sonuçlara uzun dönem içerisinde bakıldığında, olasılık dağılımını gerçekten de

1/40, 1/40, 1/40, 1/40, ... , 1/40

dizilimine istediğimiz kadar yakınlaştığı görülüyor. Şöyle ki belirlenmiş herhangi bir kare üzerine gelinmesi ihtimali, tamamen

aynı. Yani, Markov'un da yardımıyla, Monopoly kadar karmaşık bir oyunun adilliğini, herhangi bir karenin üzerine gelinme ihtimalinin –uzun dönemde– diğer karelerinkinden daha az ya da daha çok olmaması gerektiği düşüncesi üzerinden *ispatlayabiliyoruz*. Tabii ki ilk oyuncunun hala daha küçük bir avantajı var ama bu durum, banka hesaplarının sonlu olması sebebi ile hafifletilmiştir.

Daha önce de söylediğim gibi, söz konusu olasılık denklemleri oyunun idealleştirilmiş halinde geçerlidir. Bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere, kesinlikle oyunun gerçek halinde çalışmazlar. Özellikle de gerçek oyunda bulunan "Kodese Git" karesi, yamulmuş bir olasılık dağılımına sebebiyet verir. Aslında, iş dünyasına ilginç ama muhtemelen kasıtsız bir gönderme yaparcasına, Kodes karesi %2,5'luk "düzgün dağılım" olasılığından (ya da Kodes ve Ziyaretçi durumlarının ayrılması halinde %2,44 ki hem iş dünyası içinden hem de dışından bakıldığında mantıklıdır) ziyade, %5,89'la en sık ziyaret edilen karedir. Sıradaki en muhtemel kare, %3,18 ile Caddebostan'dır. En az ziyaret edilen kare de başlangıçtan ileri üçüncü Şans karesidir, olasılığı %0.871, tabii "Kodese Git" karesi sayılmazsa, zira sizi kodese yollayacağı için pek *ziyaret* edilmiş sayılmaz.

Benzer bir incelemeyi, yılana gelindiğinde aşağıya inilen ve merdivene gelindiğinde yukarıya çıkılan, amacın en yukarıya ulaşmak olduğu Yılanlar ve Merdivenler oyunu üzerinde denemek isteyebilirsiniz. İşte şimdi uzun dönemli dağılımın eşit olasılıkları *yoktur.* Peki, sizce neye benzer?

Ve biraz daha alengirli bir soru ki buna bilgisayar simülasyonu kullanarak taarruz etmenizi tavsiye ederim, tabii bir çeşit matris cebirleri dahisi değilseniz. Yılanlar ve Merdivenler tahtası üzerindeki konumların uzun dönemdeki olasılık dağılımları, başlangıç konumunun bitiş konumuna bağlanıp oyunun sonsuz bir döngüye sokulması halinde ne hal alır?

MARKOV MATRİS MERAMI

Hareket matrisini M ile gösterelim. İlk adım M'nin özdeğerleri denen 40 adet sayıyı hesaplamaktır. (m sayısı M'nin özdeğeriyse, ağ içerisindeki 40 konuma öyle 40 sayı yazabilirsiniz ki bu sayıların her biri altı parçaya bölünüp ağda ki çizgiler üzerinden dağıtıldıktan sonra genel toplam hesapladığında bir konumdaki sayı, ilk halinin m katı olur. Pöfff. Semboller ile gösterimi daha kolaymış: bir v için Mv=mv.) Ama bir bit yeniği var: bu sayılar artık olasılık -0 ile 1 arasındaki reel sayılar- olmak zorunda değil, $i=\sqrt{-1}$ kullanılarak ifade edilen karmaşık bir sayı da olabilirler.

Bu arada, yukarıdaki parantez içinde bahsi geçen 40 sayı ile oluşturulan diziye (v ile ifade ettiğimiz), "özvektör" denir.

Şimdi, der Andrey Andreyeviç, bütün yapman gereken, hesapladığın 40 özdeğer arasından en büyüğünü seçmek. Şu halde, uzun dönemdeki olasılık dağılımına, ilgili özvektörün gerçek olasılıklara "normalize" edilmiş hali (dizideki her bir sayının dizinin toplamı ile bölünmesi) ile istenildiği kadar yakınsanabilir.

Şekil 35'in döndürmeler altındaki simetrisi sayesinde, özdeğer ve özvektörleri hesap etmek aslında zor değil. Özellikle, bunlardan biri de şöyle çıkar

1/40, 1/40, 1/40, 1/40, ... , 1/40.

Peki, özdeğeri nedir? Söyle, farz et ki bu dağılım ile başlayıp, her 1/40'ı altı eşit 1/240 büyüklüğünde parçaya böldükten sonra saat yönü üzerinde altı konuma kaydırmışsın; her konum altı tane katılımcı alacaktır. Yani her konum üzerindeki olasılık yine 6x1/240=1/40 olur. Bir özvektörün yapması gereken tam da budur ve şu halde özdeğer 1 çıkar.

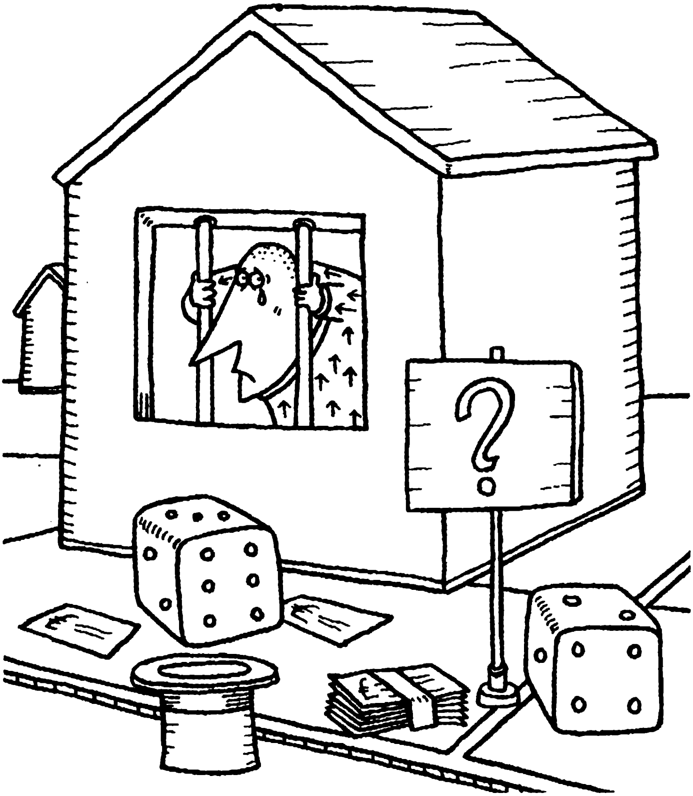
Size diğer 39 özdeğeri vermeyeceğim ki ifadeleri (sadece) matematikçiler için büyüleyicidir. Ama bir hesap ile hepsinin 1'den ufak olduğu (soyutçular için mutlak değer altında) gösterilebilir. Aslında sıradaki en büyük olanın mutlak değeri 0,964'dür. Haliyle 1 elimizdeki en büyük özdeğerdir ve özvektörü olan

1/40, 1/40, 1/40, 1/40, ... , 1/40'da

gerçekten, olasılık dağılımının uzun dönemdeki halini ifade eder.

10

Monopoly, İade-i Ziyaret



Şimdi sıra, çok daha karmaşık olan gerçek Monopoly'de -hatta o kadar karmaşık ki Markov zincir metoduyla bile her ince ayrıntıyı çözümlemek mümkün değil. Ama en sık ziyaret edilen karenin, herhangi bir diğer karenin olasılığının iki katı olasılıkla "Kodes" olduğunu gösterebiliriz. Ve bir de en düşük olasılıklı karenin üçüncü şans karesi olduğunu. Gerçek eğlence, mülk ve ticaret işlerini modellemeye çalışmamızla başlıyor. Bir ev ya da oteli, ne zaman ve nerede almalısınız?

Önceki bölümde Monopoly oyununun basitleştirilmiş bir matematiksel modeline bakıp, herkesin "Başlangıç" karesinden hareket etmesi sonucu oluşan olasılık yığılmasının zamanla düzelip düzelmediğini araştırmıştık. Söz konusu incelemede çift zar atmanın sonuçları, "Kodese Git" karesinin ve Şans kartlarının etkisini görmezden gelmek gibi bazı basitleştirici varsayımlar üzerine dayandırılmıştı.

Tabii ki bu gerçek Monopoly üzerine bir inceleme değildi ve ben de Nisan 1996 senesinde esas köşeyi yazarken öyle bir şey yapmak niyeti içerisinde değildim. Bu, rahatsız Monopoly hayranlarının hiddetlerini ifade etmek amacıyla bana, değişen nezaket(sizlik) dereceleri içerisinde yazdıkları mektupları engelleyememiş olsa da keskin zekalarını kullanıp bana kendi incelemelerini yollayan anlayışlı okurları da cesaretlendirmiş oldu. İşte ben de aynen o yılın Ekim ayında yapmış olduğum gibi, bu mektupları herkesin görgü ve zihin eğitimi için anlatıyorum. Çok kısa bir süre içerisinde göreceksiniz ki basitleştirilmiş versiyona uyguladığım yöntemler tam kural setine uymak üzere kolaylıkla ayarlanabilir. Peki, ben niye öyle yapmadım? Gerçek oyun, onu incelemek için kullandığım matematiği hissettirebilmem için biraz fazla dağınık olduğundan, daha basit ama alakalı bir şey üzerinden alıştırma yapmak daha yararlı olur diye düşündüm. Hatırlarsanız temel fikir: oyunu bir Markov zinciri, yani olasılık-

ların dağılımından oluşan bir matris olarak ifade edilip, "özdeğer" ve "özvektörlerini" hesaplamaktı. Ondan sonra Markov'un teorisi, herhangi bir kare üzerinde konaklama olasılığının uzun dönemde, özdeğeri en büyük özvektöre yakınsayacağını söyler. Basitleştirilmiş modelin güzel bir matematiksel simetrisi vardı ki bu da özdeğer ve özvektörleri *tam olarak* hesaplamayı mümkün kılıyordu. Size formülleri göstermedim ama simetri, girdileri 1/40 olan vektörün, özdeğeri 1 olan bir özvektör olduğunu göstermemi sağlayarak teorinin bir yüzünü tasvir edebilmemi sağladı. Sonra da diğer tüm özdeğerlerin birden küçük olduğunu beyan ederek (ki tamamen aynı formülden çıkmaktadır) sizlere, basitleştirilmiş modeldeki uzun dönem olasılıkların bütün kareler için aynı olduğuna dair ispatın iskeletini vermiş oldum.

Böylesine geniş bir basitleştirme yapmaya hakkım var mıydı? Benim, genellikle, esas amacım sizlere matematiğin *ilginç* olduğunu gösterebilmektir. Bu yüzden de kullanışlılık ikincil bir özellik olarak kalmış ve birçok pratik konu görmezden gelinmiştir. Örneğin Murphy Kanunu üzerine olan Bölüm 4'de, ekmek diliminin kalınlığının sıfır olduğu varsayılmıştır. Gerçek ekmek dilimlerinin daha belirli bir kalınlığı olsa da buradan, matematikçilerin ekmek diliminin ne oluğunu bilmedikleri gibi bir sonuç çıkmaz. Çıkan tek şey, o durumda işleri karıştıran bir etkeni görmezden gelmeye karar verdikleridir. İşte bu yüzden de matematiksel modeli basit tutarak simetrinin rolünü gözler önüne sermek adına, Monopoly'nin bazı kurallarını görmezden gelmek akla yatkındır.

Eğer yapmaya çalıştığınız şey *gerçek* Monopoly'yi çözümlemek ya da matematiği oyuna uygulayarak kullanışlılığını göstermekse, kuralları görmezden gelmek akla yatkın değildir. Nitekim bizim de şimdi, daha çok işlem hesaplayacak olsak da aynı ilkeleri kullanarak yapacağımız şey odur. Basitleştirilmiş oyun, bütün o ilkeleri birçok teknik hesap içerisinde boğulmadan kurmamızı sağladı.

Hatırlayın ki problem, oyun birkaç tur oynanıp, olasılıklar "durağan" bir hale yaklaştıktan sonra rasgele seçilmiş bir kare-

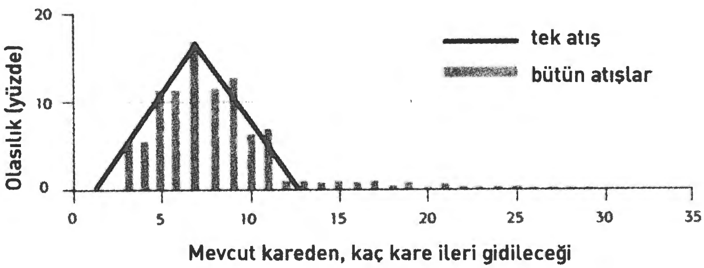
nin, üstüne gelinme *olasılığını* hesaplamaktı. Yine Markov zinciri yöntemini kullanacağız ama şimdiki olasılık değişimi matrisi o kadar estetik olmayacak ve tam bir formül çıkarmaktansa, sayısal yakınsamalar bulmaya yönelmemiz gerekecek. Benimle iletişim kuran birçok okur, gayet mantıklı bir şekilde bilgisayarlı cebirsel hesaplara yönelmiş ve problemi öyle çözmüşlerdir; bunlardan bazıları simülasyonu çok sıranın döndüğü, uzun bir oyun için çalıştırmış ve deneysel yaklaşımlar elde etmişlerdir.

En kapsamlı incelemeler, Portsmouth RI'dan William Butler, Maple Valley'den bir Boeing mühendisi Thomas H. Friddell ve Northfiel MN'de St. Olaf College Matematik Bölümü üyesi Stephen Abbot ve meslektaşı Matt Richey'den geldi. Butler kendi yazdığı bir Pascal programını, Friddel, Mathcad ve Abbot da Maple kullanmış. Aşağıda yer alan müzakere, bu kişilerin yaptığı çalışmalarının bir sentezidir. Bütün Monopoly modellerinde, işlenen detay seviyesi üzerinde bir takım varsayımlarda bulunulmuştur ve değişik okurlar tarafından yapılan bu varsayımlardaki farklılıklar önemsiz olduklarından, görmezden gelineceklerdir.

Benim basitleştirilmiş modelimden farklı yapılan ilk şey, zar atılması üzerine geçerli olan bütün kuralların dikkate alınacak olmasıdır. İki tane zar atılır ve gelen sonuç eşse, oyuncu tekrar zar atar; fakat üç kere ardışık eş zar atmak, oyuncuya kodesi boylatır. Zarın atılması, kendi başına bir Markov zinciridir ve her zamanki yöntemle çözülebilir. Sonuç olarak ortaya, bulunan pozisyondan belirli herhangi bir mesafe uzaklaşmanın ihtimal grafiği, Şekil 37 çıkar. Dikkatinizi çekmek isterim ki en muhtemel mesafe 7'dir ama 35 kare ilerlemekte (6:6, 6:6, 6:5 atarak) mümkündür. Fakat, 29 kareden daha fazla ilerlemek ihtimali o kadar düşüktür ki grafikte görünebilir olmayı başaramaz.

Sırada, "Kodese Git" karesinin etkilerini hesaba katmak var. Kodes kurallarının kendisi, tamamen tesadüfi olarak, bazı problemler çıkarmaktadır zira oyuncular hapishaneden çıkmak için para harcamayı ya da eş zar beklemeyi (ya da oyunun son aşamalarındaki fahiş kiralardan kurtulmak amacıyla hapse girerek çift zar *atmamayı*!) tercih edebilirler. Bu karar ile ilintili olan olası-

lıklar oyuncunun psikolojisi ve hesap bakiyesine bağlıdır, haliyle bu süreç Markovsal değildir. Birçok okur, oyuncuların kodesten çıkmak için para harcamayacağını varsayarak, bu problemin etrafından dolaşmıştır. Şu halde "Kodes"in, bir Markov altsüreci olarak bakıldığında tek bir kareden ziyade, oyuncuların "Kodese Yeni Girdim" halinden "Bir Turdur Kodesteyim" haline, oradan da "Bir Sonraki Turda Mutlaka Çıkmam Lazım" durumuna düştükleri üç kavramsal kare olarak görülmesi gerekir. Tabii ki "Kodese Git" karesinin ihtimali sıfır olmalıdır, zira hiç kimse o karenin üzerinde *duramaz*.



Şekil 37 Tek seferde, belirli sayıda kare ilerlemenin, eş zar atma kuralları da göz önüne alındığındaki olasılıkları.

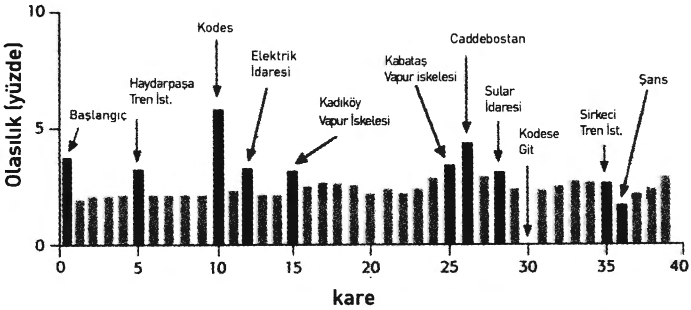
Bir sonraki adım, "Şans" ve "Kamu Fonu" karelerinin olasılık dağılım matrisinde yaratacağı etkiyi hesaplamaktan geçer ki bu kareler oyuncuyu, Kodes ya da herhangi başka bir kareye yollayabilir. Bütün bunlar gayet basit bir şekilde, bu kartlardan yüzde kaçının oyuncuyu önceden belirlenmiş bir kareye yolladığı hesaplanarak çözümlenebilir.

Dağılım matrisi isabetli bir şekilde kurulduktan sonra durağan hal olasılıkları, özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması ya da yüksek sayıda zar atıldıktan sonraki durumun, dağılım matrisi M'nin M^2, M^3, ... kuvvetleri hesaplanarak çıkarılmasıyla bulunabilir. Markov'un, M'nin kuvvetlerini en büyük özdeğerin özvektörüne ilintileyen genel teorisi sayesinde, bu iki yaklaşımın matematiksel olarak birbirine denk olduğunu biliyoruz. Fark-

lı karelerin olasılıkları, virgülden sonra dokuz basamağa kadar doğru yüzdeleriyle gösterilmiş olarak Tablo 3'de sergilenmiş ve Şekil 38'de grafiklendirilmiştir. En çarpıcı sonuç, oyuncuların "Kodes" karesi üzerinde bulunma ihtimallerinin (5,89%) diğer bütün karelerden neredeyse iki kat fazla olmasıdır, bir sonraki en muhtemel kare de (3,18%) Caddebostan olur. Ulaşım kareleri incelendiğindeyse, en sık üzerine gelinen Kabataş Vapur İskelesi (3,06%), Haydarpaşa Tren İstasyonu (2.99%) ve Kadıköy Vapur İskelesi de (2.91%) hemen ardından geliyor ama Sirkeci Tren İstasyonunun (2.44%) olasılığı çok daha az. Bunun ardında yatan sebep, diğer ulaşım seçeneklerinin tersine bir Şans kartı üzerinde bulunmuyor oluşu. Altyapı hizmetleri arasındaysa, Sular İdaresi (2,81%), Elektrik İdaresi'nin (2,62%) açık ara önünde.

Tablo 3 Belirli bir karenin üzerine gelme olasılıklarının, durağan haldeki değerleri.

Kare	Olasılık (%)	Kare	Olasılık (%)
BAŞLANGIÇ	3,113802817	ÜCRETSİZ OTOPARK	2,874825933
KASIMPAŞA	2,152421585	BOSTANCI	2,830354362
KAMU FONU	1,889769064	ŞANS	1,047696537
DOLAPDERE	2,185791454	ERENKÖY	2,738576558
GELİR VERGİSİ	2,350777226	CADDEBOSTAN	3,187794862
HAYDARPAŞA TREN İST.	2,993126856	KABATAŞ VAPUR İSKELESİ	3,063696501
SULTANAHMET	2,285359460	NİŞANTAŞI	2,706510944
ŞANS	0,8760265658	TEŞVİKİYE	2,679312587
KARAKÖY	2,347010651	SULAR İDARESİ	2,810736815
SİRKECİ	2,330647102	MAÇKA	2,591184852
ZİYARETÇİ / KODES	5,896419869	KODESE GİT	0
BEYOĞLU	2,735990819	LEVENT	2,686591663
ELEKTRİK İDARESİ	2,627460909	ETİLER	2,633846362
BEŞİKTAŞ	2,385532814	KAMU FONU	2,376569966
TAKSİM	2,467374766	BEBEK	2,510469546
KADIKÖY VAPUR İSKELESİ	2,918611720	SİRKECİ TREN İST.	2,445895703
HARBİYE	2,776751033	ŞANS	0,8715029109
KAMU FONU	2,571806811	TARABYA	2,202178226
ŞİŞLİ	2,916516994	LÜKS VERGİSİ	2,193106960
MECİDİYEKÖY	3,071024294	YENİKÖY	2,646925903



Şekil 38 Durağan hal olasılık dağılımı: tahtadaki kareler 1-40 arası sayılandırılmıştır ve her çizginin uzunluğu, o karenin üzerine gelme olasılığının uzun dönemdeki değeridir.

Başlangıç (3.11%) üçüncü en muhtemel kare ve üçüncü Şans karesi de (0.87%) en az muhtemel kare –tabii, Kodese Git'i (mantıksal sebeplerle, 0% ihtimal) saymazsak.

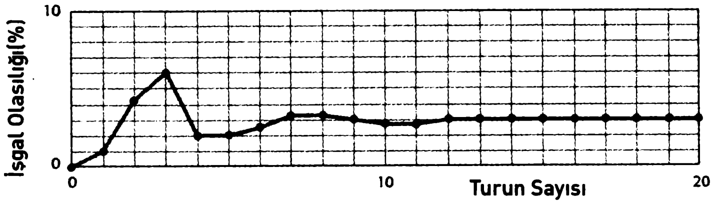
Friddel daha ileri giderek Monopoly'nin mülk piyasasını da incelemiştir ki oyunu esasen ilginç kılan özelliği piyasasıdır. Friddel'in hedefi, ev satın almadaki paçayı yırtma anını –gelir miktarının gider miktarının geçtiği anı– bulmak ve ev, otel alımındaki en iyi stratejileri hesaplamaktı. Mülk piyasasında başarılı olmak için yapılması gerekenler, oyuncu sayısı ve oyunun hangi kurallarla oynandığına dayanmaktadır. Evlerin, oyunun başından itibaren satın alınabileceği farz edilirse –ki "Kısa Oyun" kurallarında öyledir– birkaç genel prensip ortaya çıkar:

- Evleri erkenden satın almanın maliyeti daha yüksek olsa da paçayı yırtma anına daha hızlı ulaşmanızı sağlar.
- İki ya da daha az ev sahibi iken paçayı yırtmak 20 tur kadar sürecektir. Üç ev ile çok kesin bir gelişme sağlanabilir.
- Başlangıç ve Erenköy arasında, üç ev sahibi stratejilerde en hızlı paça yırtmayı sağlayan mülk, Mecidiyeköy'dür ki yaklaşık 10 tur da paçayı yırtarsınız.

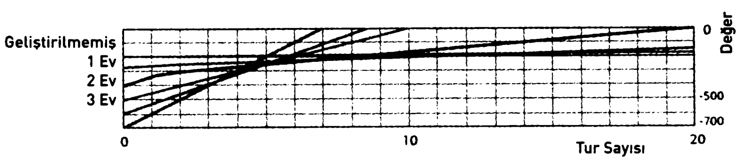
Erenköy'ün ötesindeki mülkler incelenmemiştir: Friddel, bu noktada durma sebebini, araştırmalarını yayınlamayı hiç beklemediğini söyleyerek açıklıyor. Şimdi, Friddel'in mülk inceleme

tekniklerini Mecidiyeköy'e uygulayarak örnek veriyoruz. Şekil 39, söz konusu mülkün belirli bir turdaki işgal edilme ihtimallerini sergilemektedir. Mülkün genel değerinin, satın alındıktan sonraki tur sayısıyla beraber nasıl değiştiğini Şekil 40'da görebilirsiniz. Bu şekil üzerinde, kaç otel ve ev sahibi olunduğuna göre değişen, altı adet grafik vardır (negatif değerler mülkün alımından dolayı oluşan giderleri ifade eder).

Başka birçok okurumuz ilginç gözlemleriyle bu araştırmaya katkıda bulunmuşlardır ama ben sadece birkaçından bahsedebileceğim. Maryland Heights MO'dan Earl A. Paddon'ın simülasyonları ve Freetown CT'den David Weiblen'ın hesapları, olasılıkların oluşturduğu



Şekil 39 Mecidiyeköy'ün belirli bir turda işgal edilme olasılığı.



Şekil 40 Mecidiyeköy'deki mülklerin ortalama nakit akışı.

deseni onaylar niteliktedir. Weiblen yazışmalarımızda, olasılıkların oyunun "adaleti" üzerine bir etkisi olmadığını, zira bütün oyuncuların aynı durumla yüz yüze olduğunu vurgulamıştır. (Ben "adil" dediğimde hilesizi kastetmiş olsam da anlamını açıklığa kavuşturmak yerinde olmuştur ve Weiblen'a tamamen katılıyorum.) Bu noktayı vurguladıktan sonra da "Düşük olasılıklı karelerin mükafatları, o düşük olasılıkla ters orantılı olarak

artırılmış olsaydı sorun çıkardı. Oyunculardan biri saf şans ile büyük bir avantaj elde etseydi, işte o zaman bu adaletsizlik olurdu." demiştir. Fakat, Monopoly'nin bu bakış açısından adaletsiz olmadığı sonucuna varır.

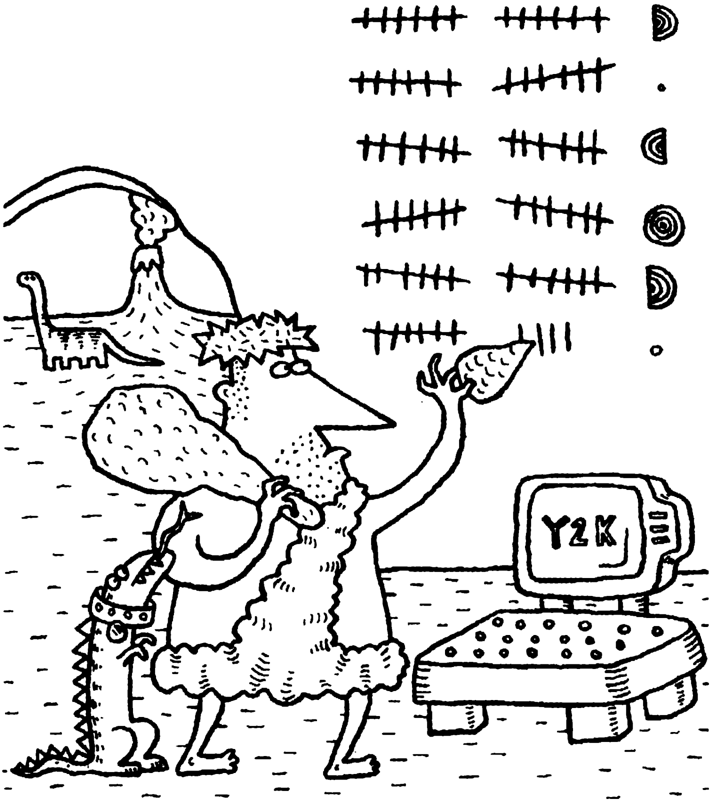
East Setauket NY'den Bruce Moskowitz, şu yorumuyla incelemelere bir boyut daha eklemiştir: "Gençliğimde arkadaşlarım ve kardeşlerimle beraber birçok kez Monopoly oynamışlığım vardır ve St. James Place, Tennessee Avenue bir de New York Avenue [Harbiye, Şişli, Mecidiyeköy] gibi turuncu renkli karelerin, kodesten çıkarken bunlardan biri üzerine gelinme ihtimali yüksek olduğundan özellikle değerli olduğu bilinirdi." Bu inceleme teorik olarak da onaylanmıştır zira bahsi geçen üç mülkte olasılıklar listesindeki ilk 12'nin içindedir. Birçok başka kare de başka sebeplerden ötürü, diğer karelerden daha yüksek olasılıklara sahiplerdir.

Cambridge MA'dan Jonathan Simon, oyundaki ihtimalleri düzenlemek için ucuz mülklerin başlangıca yakın koyulduklarını düşündüğüm için beni azarlamıştır: "Monopoly, ... Büyük buhran sırasında elinde gereğinden fazla boş zaman olan tek bir tasarımcı, Charles Darrow tarafından yaratılmıştır. Servet süslemeleri, şişko ve zengin adam karikatürleri altında, (kurnazca) fakirlerin oyunudur. Neredeyse bütün Monopoly çekişmelerinde "ucuz" mülkler, tekelleştirilmesi en önemli kareler olarak ortaya çıkarlar. Her oyuncunun sınırlı hesap bakiyesi göz önüne alındığında New York, Virginia, Connecticut [Mecidiyeköy, Taksim, Sirkeci] ve evet Baltic [Dolapdere] oyunun başında kar kurulabilecek yegane denge değiştirici karelerdir. Yüksek "karlı" mülkler... sahip olunması yüksek fiyatlı ve bakımı, ucuz evlere sahip olmadan sağlanamayacak kadar el kol bağlayıcı derecede pahalı karelerdir."

Mesajınız alınmıştır, yine de yüksek karlı bir mülkün, Weiblen'ın saf şans yüzünden avantaj elde edilmemesi ilkesine dayanarak, başlangıca yakın konmasının kesinlikle adil olmayacağı kanısındayım. Ayrıca birçok ucuz mülk alıp bunları kiraya vermenin bir fakir adam stratejisi olduğuna pek ikna olamadım!

11

Bilgisayarlı Tarihe Giriş



Artıkyıllarla ilgili enteresan kurallar yüzünden günümüz takviminin karışık olduğunu düşünüyorsanız, tamı tamına 1577.917.500 günlük bir döngü üzerine kurulu eski Hint takvimine ne derdiniz acaba? Peki ya bir senenin 12 ya da 13 ay içerebildiği Çin takvimi? Neden bu kadar çok takvim var ve neden bunların her birinde bir şeylerden ödün verilmiş? Gök kubbenin gerçek döngüleriyle tam uyumlu bir takvim matematiksel olarak mümkün değildir de ondan.

M.Ö. 46 yılında roma takvimi mevsimlerle olan senkronizasyonunu kaybetmeye başlamıştı. Yunan Astronom Sosigenes'in tavsiyesi üzerine Jül Sezar, her 4 yıldaki "artık" yıla bir gün daha eklemiş ve ortalama yıl uzunluğunu 365¼ güne çıkarmıştır. Kuralı yanlış anlayan rahipler her döngüdeki dördüncü yılı bir sonraki döngünün ilk yılı olarak saymış ve böylece her üçüncü sene artıkyıl haline gelmiştir. Bu hata, 50 sene boyunca tam olarak düzeltilmeden sürdürülmüştür. Dünya'daki çoğu bilgisayarların 31 Aralık 1999'dan sonraki tarihleri algılayamaması ve 2000 senesini 1900 olarak işlemesi yüzünden ortaya çıkan "Milenyum Hatası"nda da görüldüğü üzere, ince zekamızın bütün varsayımsal kudretine rağmen Sezar'ın rahiplerinden ders almış değiliz. Aslında, birçok bilgisayar –en popüler işletim sistemini kullananlardan bahsediyorum– artıkyıllarla ilgili kurallarla bile başa çıkamamaktadır. 31 Aralık 1999'u bir dakika geçtiğinde, genel kanının aksine uçaklar gökten yağmur gibi düşmedi. Ha bu arada, hiçbir zaman bir sıfır senesi yaşanmadığından gerçek milenyum 2000'de değil, 1 Ocak 2001'de başlamıştır ama çoğu insan bu konu hakkında bilgilendirilmekten hoşlanmaz.

Tekrar aynı hataya düşmemize gerek yok. Urbana-Champaign'deki University of Illinois'daki Bilgisayar Bilimleri bölümünden Nachum Dershowitz ve Edward M. Reingold bundan on sene kadar önce, Unix tabanlı metin derleyici GNU-Emacs

için bir takvim ve ajanda uzantısı geliştirmeye karar vermişlerdi. Bu projeden çok özel bir kaynak türedi: Bir takvimsel sistemden ötekine geçişleri hesaplayan bir bilgisayar kodu. Alakadar olmaya karar verdikleri 14 takvimin listesi şöyle: Gregoryen, ISO, Rumi, Koptik, Etiyoptik, İslami, Pers, Bahai, Musevi, Maya, Fransız Devrimsel, Çin, ve eski Hindu ile modern Hindu. Kitapları *Takvim-i Hesaplar*[1] (Ek kaynaklar) kronoloji uzmanları için tam bir altın madeni niteliğindedir.

Takvimlerin kültürden kültüre değişme sebepleri, hepsinin imkansızı başarmayı amaçlamasıdır: irrasyoneli rasyonelleştirmek. Zaman için belirlemiş olduğumuz birimler, üç farklı astronomik döngü üzerine kurulmuştur: gün, ay ve yıl. Normal bir 24 saatlik *ortalama güneş günü*, Güneş'in kafamızın üzerinden iki kere geçmesi arasında kalan zaman dilimidir. (Kendi ekseni etrafında, "sabit" yıldızlara nazaran, 23 saat 56 dakika ve 4 saniye sürer –ama Dünya Güneşin etrafında da dönmektedir ve Güneşin söz konusu kaymasından kaynaklanan hatayı telafi etmek için bir 4 dakika daha eklenir.) Ardışık yeniaylar arasındaki süreye de *ortalama kamer ayı* denir ki 29,530588853 gün sürer. Güneşin görünen yörüngesi üzerinde aynı noktaya geri gelmesi için gerekli olan süreye de *ortalama tropik yıl* denir ve 365,242189 günden oluşur.

Eğer aylar 29,5 gün ve yıllar da 365,25 gün olsaydı, Ay her 59 günde (29,5×2) ve Güneş de her 1461 günde (4×365,25) bir hareketlerini tekrarlardı. Haliyle her 86.199 günde bir (59×1461), Güneş, Ay ve Dünya'dan oluşan sistem tam olarak aynı göreceli konuma dönerdi. 86.199 günlük döngüye sahip bir takvim, gelgitsel sürtünmeden dolayı oluşan, bir günün, ayın ve yılın uzunluğundaki küçük değişiklikleri görmezden gelerek sürekli devam ederdi. Takvim tasarımcılarının şansızlığı eseri, günler, aylar ve yıllar arasındaki oranlar irrasyonel sayılar gibi davranmaktadırlar yani, kesirli sayı olarak ifade edilemezler. (En azından ufak tam sayılar kullanarak ifade edilemezler: pratik olamayacak kadar uzun bir döngü ile sonuçlanır.) Haliyle işler

1- Calendric Calculations.

uygulamaya geldiğinde aysal ve güneşsel döngüler asla aynı saatte *tam olarak* aynı duruma dönmezler.

Gün, gündüz-gece döngüsü sebebiyle zaman belirlemekte merkezsel bir öneme sahiptir, gezegenimizin yegane doğal uydusuna bağımlı olan ay, birçok kültür için dinsel sebeplerden dolayı önemlidir ve yıl da mevsimlerin döngüsünü belirler, haliyle kapsamlı bir takvimin her üçünü de içermesi gerekir. Uygulamada, birçok kültür ya Güneşsel bir takvime yönelip ayları altüst eder ya da aysal bir takvime yönelip mevsimlerle ilgili sorunları görmezden gelir. Seçimi ne olursa olsun, takvim tasarlayıcısının küçük birikimsel hatayla baş etmenin bir yolunu icat etmesi gerekir ve bu yüzden de artıkgünler, değişken uzunlukta aylar ve bunun gibi karmaşık takvimsel mefruşatlara maruz kalırız. İşlerin ne kadar karışabileceğini tam manasıyla anlamak için ya *Takvim-i Hesaplar*'ı edinmeniz ya da web sayfasını ziyaret etmeniz gerekmektedir:

http://emr.cs.iit.edu/home/reingold/calendar-book/second-edition/

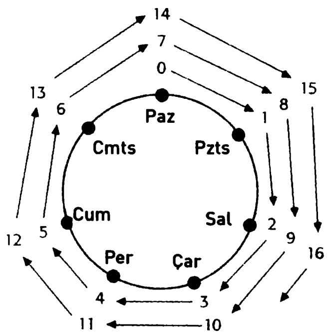
Burada birçok ince noktayı atlayacak olsam da kitabın özgün ve büyüleyici çeşnisinin bir kısmını sergileyeceğim. En basit takvimsel sistem aylar ve yılları görmezden gelip, münasip bir başlangıç "olayı" seçenek, art arda gelen günleri sayılandırır. Astronomlar böyle bir sistem olan Rumi günü kullanırlar ama Dershowitz ve Reingold kendilerine ait bir icadı tercih etmişler: "sabitlenmiş gün" ya da "rata die" (RD olarak kısaltılır). RD sistemindeki 1. gün, bugün kullanmakta olduğumuz Gregoryen sistemindeki 1. yılın Ocak 1'i olarak kabul edilir. Papa Gregory XIII tarafından 1582'de yürürlüğe sokulduğundan, Gregoryen takvimde gerçek bir birinci yıl yoktur, haliyle bizde geriye doğru sayarak sistemimizi uyduruyoruz. Şans eseri o birinci gün de bir Pazartesi çıkıyor ki bir önceki Pazar gününü 0. Gün olarak kabul ederek bir haftadaki günleri Pazar gününden başlamak şartı ile 0-6 arası sayılandırabiliyoruz. Takvim-i Hesaplar kitabı RD'i ortak bir referans sistemi olarak kullanır: örneğin Musevi takvimdeki bir tarihi Çin takvimine çevirmek için önce Musevi'den

RD'ye oradan da Çin'e çeviriyoruz. Bu sayede, sadece 28 adet dönüşüm fonksiyonu (her 14 takvim için iki yöne birer tane) gerekli olur.

Şimdi gerekli olan matematiği örneklendiren iki tane basit ısınma problemi çözelim:

1. 1000.000 RD haftanın hangi gününe gelecektir?
2. 0 ile 1000.000 RD arasında toplam kaç tane ortalama tropik yıl tamamen geçecektir?

İlk soruyu çözmek için, bir haftadaki günlerin kendini tekrar eden 7'lik bir döngü içinde, Şekil 41'de görüldüğü gibi dönüp durduğu algılanmalıdır. Haliyle 7'nin katı olan herhangi bir RD Pazar günü olmak zorundadır, 7'ye bölündüğünde 1 kalan herhangi biri de Pazartesi olmalıdır ve böylece devam eder. Biz bu durumu ifade etmek için gün sayısının *modulo* 7, RD'ye eşit olduğunu



Şekil 41 Modulo 7 sayarak haftanın hangi günü oluğunu bulmak.

söyleriz. "Modulo" Latince "modülü" demektir: x mod 7 de "x'i 7'ye böldüğünde kalanı bul" anlamına gelir. 1000.000=7×142.857+1 olduğundan bu işlemin kalanı 1'dir ve böylece 1000.000 RD'nin Pazartesi gününe denk geldiği görülür.

İkinci soruya cevap vermek için, 1000.000'ü 365,242189 ile bölüp 2737,9094 elde ederiz. Bu da bize 0 RD'den, 1000.000 RD'ye tam 2737 (ortalama tropik) yıl geçtiğini gösterir ki bu sayıya virgülden sonraki her şeyi görmezden gelerek vardık. Bu işlem matematiksel olarak "zemin" ya da "tam değer fonksiyonu" $\lfloor\ \rfloor$ tarafından gerçekleştirilir ki $\lfloor x \rfloor$, x'den ufak olan en büyük tam sayıyı ifade etmektedir.

Şimdi de 25 Aralık 1996 gibi Gregoryen bir tarihi RD değerine çevirmeye çalışalım. Papa Gregory'nin, bir yılın ortalama uzunluğu için daha doğru bir değer sağlayan artık yıl kuralını hatırlayın: 4'ün katları 29 Şubat'ta fazladan bir gün bulundururlar, tabii eğer 100'ün bir katı değillerse, ancak 400'ün katları da artık yıldır. Dershowitz ve Reingold bu kuraldan, kutucukta gösterilen hesaplamaların çıktığını göstermişlerdir. Örneğin, G = 25, A = 12, Y = 2100 olsun. O zaman, (a) =766135, (b) = 524–20+5=509, (c) =336, (d) = –1 ve (e) = 25 çıkar. Haliyle, 25 Aralık 1996'nın RD' değeri 766.235+509+336–1+25=767004'tür. Basit bir uygulama olarak, 767.004 mod7=0'dan 1996 Noel gününün Pazar gününe denk geldiğini çıkartıyoruz.

G GÜNÜ, A AYI, S SENESİ GREGORYAN'IN RD DEĞERİNİ BULMAK

Şunları hesaplayınız:

(a) $365(S-1)$

(b) $\lfloor (S-1)/4 \rfloor - \lfloor (S-1)/100 \rfloor + \lfloor (S-1)/400 \rfloor$

(c) $\lfloor (367A-362)/12 \rfloor$

(d) Eğer A≤2 ise 0, A>2 ve S artık yıl ise –1, ve diğer her durumda –2

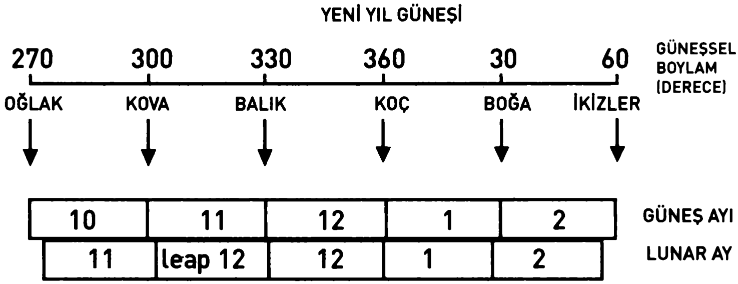
(e) G (A≤2) (>2)

sonra da hepsini toplayınız.

Hesaplamalar şöyle açıklanabilir: (a) önceki yıllardaki artık olmayan toplam gün sayısı. (b) önceki yıllardaki toplam artık gün sayısı (her dört senede bir, 100. Yıllar hariç ama 400.'leri geri ekliyoruz.) (c) Y yılında, önceki aylardaki gün sayısını hesaplayan kurnaz bir formül, Şubat'ın 30 gün olduğu varsayımı üzerinden çalışır ki 30 gün yoktur -haliyle de düzeltme terimi (d). (e) adımındaki G sayısı da tabii ki şu ana kadar sayılmamış olan, mevcut ay içerisindeki geçmiş günlerin sayısı.

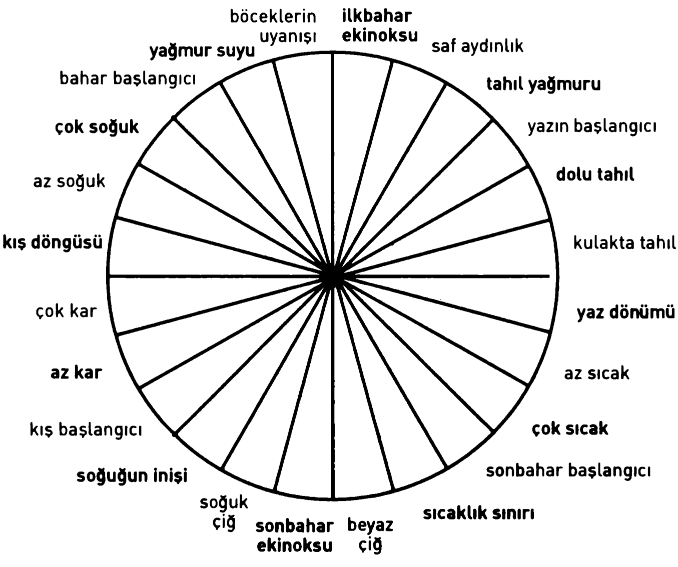
Takvim-i Hesaplar'daki yazılımın kolaylıkla baş edebildiği karmaşıklığı kavrayabilmek için günümüz Pers takvimini ele alalım. 1925'de yürürlüğe girmiştir ama başlangıç tarihi olarak, İslami takvimin başlangıcından bir önceki ilkbahar ekinoksunu –19 Mart 622 M.S.– alır. Daha eski olan ve Ömer Hayyam'ın da dahil olduğu astronomlardan oluşan bir grup tarafından hazırlanmış Celali takvim üzerinden kurulmuştur. 12 ay bulundurur: ilk altısı (Fravardin, Ordibehest, Ksordad, Tir, Mordad, Sahrivar) 31 gündür, sonraki beş tanesi (Mehr, Aban, Azar, Dey, Bahman) 30 gündür ve sonuncusu (Esfand) normal bir yılda 29, artık yılda da 30 gündür. Artık yıl döngüsü Celali takvimden, değiştirilmeden alınmıştır ve oldukça karışıktır. 683 artık yıllı, 2820 yıllık bir döngüyü takip eder. Söz konusu 2820 yıl, 21 tane 128 yıllık ve bir tane de 132 yıllık bir alt döngüye bölünmüştür. Her 128 yıllık alt döngü 29+33+33+33'lük alt-alt döngülere bölünmüşken; 132 yıllık alt döngü de 29+33+33+37'lik bir alt-alt döngüye bölünmüştür. Son olarak, her alt-alt döngüdeki 5, 9, 13 diye dörder dörder giden yıllar artık yıllardır. Pers takvimi 2820 yıllık döngünün ardından 1.7 dakikalık bir hata payı gösterir yani, gerçek astronomik döngülerden bir günlük bir kayma yaşanması için 2.39 milyon yıl geçmesi lazım!

Eski Hint lunisolar takvimi çok farklı bir yapıyı takip eder. Aylar, Ay'ın konumunu yakından takip eder ve fazladan bir artık ay, güneş merkezli yıl ile aynı adımda kalınması amacıyla "araya" eklenir. Birçok benzer sistemin aksine ekleme döngüsü sabit ve basit bir düzeni takip etmez. Bütün yapı 1577.917.500 günlük bir döngüyü takip eder. Söz konusu "yıl" (kesin olarak *arya yıldızsal* yıl) bu döngünün 4320.000'de biri, yani 365,258 gündür. Bir *güneş ayı* bir yılın onikide biridir ve 12 adet isimlendirilmiş ay vardır. Bir *lunar ay,* döngünün 53.433.336'da biridir yani 29,531 gün. Temel fikir iki ay uzunluğunu da aynı anda yürütmektir. Lunar aylar genellikle güneş aylarının arasındaki bir sınırla çakışır ama arada sırada da bir lunar ay, bir güneş ayının tamamen içinde kalır. Bu durumdaki ay, bir lunar artık ayı olarak kabul edilir ve ismi bir sonraki aya da verilir. (Şekil 42)



Şekil 42 Hint lunisolar takvim. Artık ay, lunar bir ay güneş ayının içine girdiği her sefer eklenir.

Son olarak da aritmetik kurallara değil, astronomik olaylara dayanan Çin takvimine göz atalım. Çin takvimi en az 50 kere reforma uğramıştır: Takvim-i Hesaplar'da işlenmiş hali, Qing hanedanlığının ikinci yılı olan 1645'de hazırlanan en yeni sürümüdür. Aylar lunardır, Yeni Ay'da başlarlar ve yıllar 12 ya da 13 ay içerir. Ayların düzenlenmesiyse, Güneşin burç sembolleri üzerinden geçişi ile belirlenir. Bir güneş yılı *zhonqi* denen oniki adet



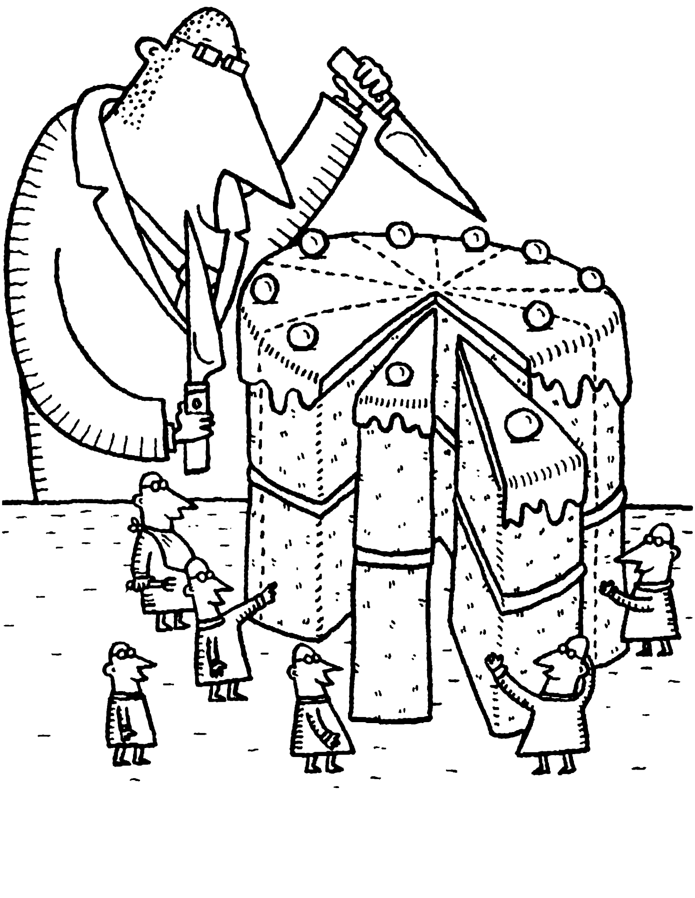
Şekil 43 Çin yılındaki güneşsel terimler (büyük terimler koyu).

büyük ve jieqi denen oniki adet küçük terime bölünmüştür. Her terim güneşsel boylamın 15°'lik bir parçasına denk gelir, büyük olanlar 30°'lerde başlar ve küçük olanlar da onların arasında kalanlardır. Bu terimler her sene üç aşağı beş yukarı aynı zaman dilimini işgal ederler (Şekil 43). Bu takvimi belirleyen temel kural, kış dönümünün *her zaman* onbirinci ayda gerçekleşmesidir. 12 tam lunar ay içeren bir yılda, haliyle, aylar her zaman 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 şeklinde sıralanır. 13 tam lunar ay içeren bir yılda ise, ne var ki, bu sayılardan biri artık ay olarak tekrarlanır. Peki hangisi? Büyük bir güneşsel terim içermeyen ilk ay (13 lunar ay ve 12 büyük güneşsel terim olduğundan aylardan en az biri, büyük bir güneşsel terim içeremez –bu, Şöyle bir matematiksel kuralın uygulamasıdır, "güvercin yuvası prensibi": Eğer güvercinden çok yuva varsa, en azından bir yuva güvercinsiz kalmak zorundadır.)

Günümüz takvimleri bu kadar karmaşıksa gelecekteki takvimler nasıl olacak? Şimdi gerekli olan matematiksel bilimler: dinamik, astronomi bilimleri, fizik, iklim bilim... Çeşitli astronomik döngülerin tümü gelgitsel çekim kuvvetleri yüzünden yavaş yavaş kısalmakta ya da uzamakta. Daha da ötesi, "ekinoks sapmaları" var ki bunlar dengeli değil ve buzul çağlarına bağlı yaşanan fırlamalara maruz –haliyle geleceği öngörmek isteyen bir takvim iklimi de dikkate almalı. Aslında gelecekteki bir takvim, mevcut kurallardan öteye, gerçekten olanlara göre ayarlanabilmeli yani etkileşimli olmalıdır; zira Jack Wisdom (MIT) ve Jacques Laskar (Bureau des Longtudes, Paris) isimli astronomların keşfettiği üzere güneş sistemimizin hareketleri kaotiktir, yani mevsimlere ayak uyduracak sabit bir takvim belirleyecek olursanız, meşhur "kelebek etkisi" sebebiyle gerçeğin dışına sürüklenip gidersiniz. MS 10.000.000'daki Bağımsızlık Günü yine Temmuz'un dördü olabilir ama hiç kimse bu günden itibaren kaç gün sonra olacağını tahmin edemez.

12

Ganimetleri Paylaşmak



İki kişi arasında adil bir pasta paylaşımı kolaydır: ‹Ben keseyim sen de seç›. İkiden fazla kişi ile adil paylaşım, daha karmaşık bir iştir. Ve ‹adil› derken ne kastettiğimiz daha da karmaşıktır. Size adil bir pay verildiğini düşünüyor olsanız bile, aynı anda başka birisinin hakkından daha fazla pay aldığını hissediyor olabilirsiniz. Bu sorunu ortadan kaldıran bir pasta paylaşma yöntemine ‹hasetsiz› denir. Yakın zamana kadar, hasetsiz bir pasta paylaşma yöntemi ancak iki veya üç kişilik gruplar için biliniyordu. Ama simdi ...

Becerikli Bekir, çuvalı mutfak masasının üzerine devirdi. Eğik Esra, Yamuk Yasemin ve Kaçar Kazım, para tomarları ve mücevher topları yuvarlana yuvarlana düşerken gözlerini belerterek bakakaldılar.

Şimdi işin zor kısmı başladı: ganimeti paylaşmak. Hiçbir şekilde birbirlerine güvenmiyorlardı ve hepsi, bir başkasının kendilerinden daha fazla pay almaması gerektiği konusunda kararlıydı. Bekir çok hızlı bir şekilde parayı paylaştırdı ki herkes dikkatli olduğu sürece bu kolay bir işti. Mücevherleri pay etmek daha zor bir iş olacaktı çünkü herkesin bir mücevherin ederi hakkında farklı fikirleri vardı. Şans eseri mücevheratın çoğu altın zincir gibi gerektiğinde parçalara ayrılabilecek şeylerdi.

Yasemin, gergin bir şekilde "Artık başlamamız lazım!" dedi. "Polisler çok gerimizde olamaz ve ganimetimizi saklamalıyız."

Esra, "Elmas tacı ben alayım o zaman," dedi ve tacı kafasına geçirdi. "Yasemin'de kolyeleri ve..."

Yasemin, "O kolyeler bir işe yaramaz!" diye bağırdı. "Ben zümrüt broşu bir de..."

"Susun!" diye bağırdı Kazım. "Sizin gibi düzenbazlar tartışmaya başladılar mı hiç durmazlar. Bize, her birimizin adil bir pay alacağını garantileyen, genel geçer bir yöntem lazım."

"Doğru söylüyorsun."

Çeşitli mücevherlerden oluşan yığına bakakaldılar.

Üç saat sonra, hala daha bakıyorlardı. "Bizim gerçekten ihtiyacımız olan," dedi Kazım, "matematikçilerin 'hasetsiz orantılı tahsis protokolü' dedikleri şey."

"Evet" dedi Bekir. "Tabii de şey, Kazım –o söylediğin zırvaların manası nedir?"

Yasemin, "Haset," diyerek laflarını kesti «birisinin bir başkasının aldığı şeyi ..."

"Kıskanmasıdır, o kadarını anladım da" dedi Bekir. «Ben öteki kelimeleri kastetmiştim."

"Haa, gerçekten mi?"

Kazım, kavga çıkmadan "Tahsis protokolü," diye araya girdi, "çeşitli şeylerin birkaç kişi arasında paylaşılması için sistematik bir yöntemdir. Eğer işin sonunda herkes adil bir pay aldığını düşünüyorsa, orantılı olduğu söylenir ve eğer hiç kimse bir başkasının, hakkından *daha fazla* aldığını düşünmüyorsa da hasetsiz olduğu söylenir.

"Bu söylediklerin aynı etki değil mi?" diye sordu Esra.

"Hiç de bile," dedi Yasemin. "Haksız mıyım Kazım?"

Kazım, kafasıyla onayladı. "Hasetsiz protokoller her zaman orantılıdır ama her orantılı protokol hasetsiz olmak zorunda değildir."

"Neden?"

"Örneğin," dedi Kazım, "farz etki üçünüz, üç tane eşyayı –bir bilezik, bir kolye ve bir çift de küpe– paylaşmaya çalışıyor olsun. O zaman objeleri, kişisel olarak söyle değerlendirebilirsiniz:

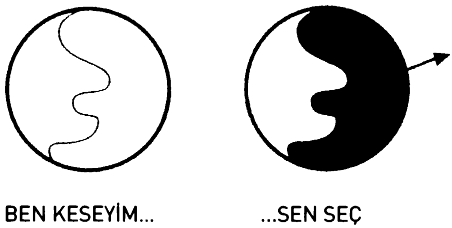
	Bilezik	Kolye	Küpeler
BEKİR	**40%**	50%	10%
ESRA	30%	**50%**	20%
YASEMİN	30%	20%	**50%**

Eğer, Bekir bileziği, Esra kolyeyi, Yaseminde küpeleri alırsa (kalın yazılmış yüzdelere bakın) orantılı bir tahsis gerçekleştirilmiş olur. Çünkü her biri, kendilerine düşen payın, %33'den daha fazla olduğunu düşünüyordur. Ama Bekir yine de Esra'ya haset

eder çünkü Esra kolyeyi almıştır ve Bekir, kolyenin bilezikten daha değerli olduğunu düşünmektedir."

Daha sonra göreceğimiz üzere hasetsiz protokoller, orantılı protokollerden çok daha zor bulunurlar. Protokolün yanı sıra her kişi için, hedeflerine ulaştıklarını düşünmelerini garantileyen bir küme stratejinin var olduğunu da bilseniz, iyi olur. Bu stratejiler protokolün bir parçası değillerdir ve sıklıkla adeten uygulanırlar ama protokolün adil olmasını garantileyen şeyler de onlardır. Genellikle bu işin içindeki kişilere "oyuncu" diyeceğiz, çünkü bütün bu sürecin bir oyundaki hamleler olarak düşünülmesi işimizi kolaylaştıracak. Bir de geleneksel olarak, paylaşılması gereken değerli eşyaları bir pasta olarak düşüneceğiz.

İki oyuncu için, diyelim ki Bekir ve Esra, basit bir hasetsiz tahsis protokolü var: "Ben keseyim, sen seç." Bekir ganimeti iki parçaya ayırır; Esra da hangi parçayı istiyorsa onu seçer (Şekil 44).



Şekil 44
İki kişi arasındaki pasta paylaşımının geleneksel yöntemi.

Bu protokol süresince işlenen stratejiler:

Bekir'in stratejisi: Ganimeti 50/50 böleyim ki Esra hangi parçayı seçerse seçsin kazıklanmayayım.

Esra'nın stratejisi: En büyük görünen parçayı seçmek.

Bekir'in stratejisi, aynı Esra'nınki gibi, kendi yaklaşımına göre en az 50% bir pay almasını garantiliyor. Bu sebepten ötürü, protokol hasetsizdir. Ve tabii ki de orantılı olur.

Ganimeti paylaşmak için bir protokol bulmak Kazım'ın fikri olduğundan, diğerleri onu araştırma yapması için yerel üniversitedeki kütüphaneye yolladılar. Kısa süre sonra çeşitli kitaplarla beraber geri döndü ki görünüşe göre kitapları çalmıştı.

"Kazım, neden ödünç almadın da çaldın?"

"Kusura bakma, Esra. Huylu huyundan vazgeçmezmiş."

Kazım matematiğin bu dalının, ilk kez savaş zamanı Polonya'sındaki Lvov şehrinde irdelendiğini keşfetmişti. 1944 senesinde, Rus ordusu Polonya'yı Almanlardan geri alabilmek için savaşırken, matematikçi Hugo Steinhaus dertlerini bir bulmacayla dağıtmaya çalışıyordu. İki kişi arasındaki pasta paylaşma protokolü "Ben keseyim, sen seç"den haberdardı ve bu protokol ile alakalı olan stratejilerin, neden her iki tarafında en az yarım pay aldıklarına inanmalarını sağladığını biliyordu. İlk oyuncu pastayı –kendi görüşüne göre– tamamen eşit iki parçaya bölüyordu. Eğer ikinci oyuncu bu eşitlik fikrine katılmıyorsa, kendi görüşüne göre büyük olan parçayı seçerek işin içinden çıkıyordu. İki oyuncunun da şikayet etmek için haklı sebebi kalmamıştı. Eğer ilk oyuncu sonuçtan memnun değilse, pastayı keserken daha dikkatli olacaktı; eğer ikinci oyuncu sonuçtan memnun değilse, yanlış dilimi kendi seçmişti. İkisi de hiçbir noktada kendileri için adil olmayacağını düşünecekleri bir seçim yapmaya zorlanmamıştı.

Kazım; Bekir, Esra ve Yasemin'e "Steinhaus" dedi, "bir pastanın üç kişi, diyelim ki siz üçünüz, arasında pay edilip edilemeyeceğini merak ediyordu."

"Peki," dedi Bekir. "belki ben pastayı eşit olduğunu düşündüğüm üç parçaya ayırabilirim ve Esra bir dilim seçer sonra da Yasemin?"

"Hayır," diye itiraz etti Esra, "o öyle olmaz. Yasemin de ben de Bekir'in kestikleri arasından aynı dilimin, pasatanın üçte birinden ve haliyle de diğer iki dilimden büyük olduğunu düşünebiliriz. O durumda, söz konusu büyük parçayı ben alırım –ve Yasemin de tatmin olamaz."

Kazım onlara, Steinhaus'un dokuz tane karmaşık adım ile gerçekleştirilen ve sonuçta her oyuncunun, pastanın en az üçte birini aldığına ikna olduğu bir yöntem bulduğunu söyler. Yani, az sonra açıklayacağımız üzere, orantılı bir protokol vardır. Bir takım teknik terimleri bu noktada tanımlamak, bizim açımızdan yararlı olacaktır. Bir oyuncu, eğer bir parçanın pastanın üçte

birinden büyük ya da eşit olduğunu düşünüyorsa, o parçanın "adil" olduğunu söyler; parçanın, pastanın üçte birinden *ufak* olduğunu düşünüyorsa da "adaletsiz" olduğunu söyler. Bir adımı "atlamak", hiçbir şey yapmamak demektir. Kolaylık açısından hep parçaların *büyüklüğünden* bahsedeceğiz ama esas kastetmek istediğimiz şey, ilgili oyuncu için geçerli olan göreceli değerleridir. İlgili hareketi yapan kişi tarafından verilen bütün hükümler özneldir. Parantez içindeki ifadeler protokolün bir parçası değildir ama protokolün neden çalışması gerektiğini açıklarlar, kısaca: oyuncuların adil paylar alabilmeleri için ellerinde bulunan stratejiler üzerine birer yorumdurlar.

1. Bekir pastayı üç parçaya ayırır (her parçanın adil olduğunu düşünmekte ve haliyle de öznel olarak eşit olduklarını bilmektedir).
2. Esra aşağıdakilerden birini yapar
   - Sırasını atlamak (eğer en azından iki parçanın adil olduğunu düşünüyorsa) ya da
   - (adil olmadığını düşündüğü) iki parçayı "kötü" olarak etiketlemek.
3. Eğer Esra atladıysa, Yasemin (adil olduğunu düşündüğü) bir parçayı seçer. Sonra da Esra (adil olduğunu düşündüğü) bir parça seçer. Son olarak da Bekir, kalan parçayı alır.
4. Eğer Esra iki parçayı "kötü" olarak etiketlediyse, Yasemin'e de Esra ile aynı seçim hakkı sunulur –atla ya da iki parçayı "kötü" olarak işaretle. Kendi etiketlendirmelerini yaparken Esra'nınkileri görmezden gelir.
5. Eğer Yasemin hiçbir şey yapmadıysa, oyuncular parçalarını, Esra, Yasemin, Bekir sırasıyla (üçüncü adımdaki stratejinin aynısını kullanarak) seçerler.
6. Öteki durumdaysa, hem Esra hem de Yasemin ikişer adet parçayı "kötü" olarak işaretlemiştir ve haliyle en az biri *ikisi* tarafından da "kötü" olarak kabul edilmek zorundadır. Bekir işte o parçayı alır. (Kendisi *bütün*

parçaların adil olduğunu düşündüğünden, şikayet edemez.)

7. Geriye kalan iki parça birleştirilir. (Esra da Yasemin de bu birleşimin, pastanın en az 2/3 kadar olduğunu dü şünmektedir.) Şimdi Esra'yla Yasemin ben-kes-sen-seççilik oynayarak ellerindeki pasta parçasını kendi aralarında paylaşırlar (böylece ikisi de kendince adil olan bir parça almış olur.)

"Vay anasını..." dedi Bekir. "Baya yüklüymüş."

"Sen dur, " dedi Kazım. "daha hiiiiç bir şey görmedin. Sorun şu ki Steinhaus'un yöntemi orantılı olsa da hasetsiz değil. Her oyuncunun adil bir pay aldığını düşündüğü ama (mesela) Yasemin'in, Esra'nın daha büyük bir parça aldığını zannettiği bir durum bulmak mümkün."

Örneğin Esra'nın, Bekir'in paylaşımını adil bulduğunu düşünelim. O zaman protokol, 3. adımdan sonra duracaktır ve hem Bekir hem de Esra her üç parçanın büyüklüğünün 1/3 olduğunu düşünecektir. Ama oldu ki Yasemin, Bekir'in parçasını 1/6 ve Esra'nın parçasını da 1/2 olarak gördü; o vakit Yasemin Esra'ya haset edecektir çünkü Esra, Yasemin'in kendininkinden daha büyük olduğunu *düşündüğü* bir parçayı ilk seçme hakkına sahipti.

"Steinhaus, hasetsiz bir protokol bulmuş mu?" diye sordu Esra.

"Yok," dedi Kazım. "Hasetsiz soruyla hiç uğraşmamış bile: o daha sonra çıkmış." Bekir pencereden dışarıya göz atarken gergin gergin dişlerini gıcırdattı. Polisler daha ortalıkta görünmüyordu. Kazım, "Onun uğraştığı şey," diye devam etti, "dört ya da daha fazla kişi arasında orantılı tahsis protokollerini bulmaktı. Arkadaşları Stefan Banach ve B. Knaster de kısa zaman içerisinde böyle bir protokol buluverdiler."

Farz edelim n tane oyuncu olsun ve bu oyuncuların isimleri de P_1, P_2, ..., P_n olsun. Bu sefer oyuncular, bir parçanın büyüklüğü $1/n$ ise adil olduğunu, büyüklüğü $1/n$'den küçükse de adil olmadığını düşünüyor. Bu tanımlar altında Banach-Knaster protokolü şöyle işler:

1. P_1 (adil) bir C parçası kesiyor.
2. P_2'ye bir seçim sunuluyor:
   • Sırasını atlamak (eğer C'nin adil olmadığını düşünüyorsa) ya da
   • C'yi kenarından köşesinden kırpmak (yine C diyeceğimiz adil bir parça oluşturmak amacıyla). Kırpıntıları geçici olarak bir köşeye kaldırıyoruz.
3. P_3'e aynı seçenekler yeni C parçası ile sunuluyor; sonra da P_4'e aynı seçenekler sunuluyor; ve böylece P_1 hariç bütün oyunculara istedikleri takdirde C'yi kırpma seçeneği sunuluyor.
4. Hiç kimse C'yi kırpmadıysa parça P_1'e veriliyor. Yok kırpılmışsa, C'yi kırpan son oyuncu parçayı alıyor. (Ve adil olduğunu düşünüyor.)
5. Pastanın geriye kalanı ve kırpıntılar yeniden birleştiriliyor. Geriye kalan n–1 oyuncu (ki bu oyuncuların hepsi, esas pastanın en az *n*–1/*n* kadarının
hala
   daha durduğuna inanıyor)aynı prosedürü tekrarlıyor.
6. Bu işlem sadece iki oyuncu kalıncaya kadar devam ediyor. Sonra da kalan oyuncular kes-ve-seç oynuyorlar.

"Banach-Knaster protokolü de orantılıdır ama hasetsiz değildir," diye vurguladı Kazım.

"Evet," dedi Esra. "Ayrıca n = 3 için de Steinhaus protokolünden farklı. Aslında daha bile basit."

"Doğru söyledin," dedi Kazım. "Bunun sebebi, yeni bir fikir olan kırpmayı içermesi. Ve Steinhaus'un katkısı bir başka önemli fikri daha, zaten sunmuştu: pastanın bir parçasını pay et, sonra da kalanı üzerine odaklan."

Esra sandalyesinde geriye doğru yaslanıp, tavana baktı. "Tabii ki bizim durumumuzda her parçanın ederi üzerine anlaşabiliriz diye bir şey yok."

"Hah," dedi Kazım. "Aynısı Steinhaus içinde geçerliydi. Bu problem sınıfının anahtar özelliklerinden biri de oyuncuların pastanın çeşitli kenar ve köşelerinin değeri hakkında aynı fikirde

olmak zorunda olmamalarıdır. Öznel farklılık ihtimali, olmazsa olmaz bir özelliktir. Hatta Steinhaus'un da fark ettiği üzere problem, insanlar anlaşamadıkları durumda daha *basittir.*"

"O niye öyleymiş? Kulağa daha zor geliyor."

"Eğer ben pastanın kremasını sen de üzerindeki şekerden süslemeleri seviyorsan, Esra, nispeten basit bir şekilde tatmin edilebiliriz."

Bekir bu noktayı anladığını göstermek için homurdandı. "Kazım, bu protokol işleri biraz pimpirikli çıktı. Polis her an gelebilir. Kullanabileceğimiz herhangi başka bir yöntem var mı?"

"Tabii. Liapunov Konvekslik Teoremi denen fikir üzerine kurulmuş, soyut matematiksel varlık ispatları mevcut. Bunlar bize adaletli pasta paylaşımlarının her zaman mevcut olduğunu söylese de böyle bir paylaşımı nasıl bulacağımızı söylemiyor. Bir de "hareketli bıçak" algoritmaları var."

Aşağıda, L.E. Dubins ve Edwin Spanier tarafından bulunmuş fikirlerden küçük bir tadımlık. Geniş bir bıçak, kendine paralel bir şekilde pasta üzerinde hareket ettiriliyor. Oyuncular sonuçta ortaya çıkacak olan dilimi kabul edecekleri anda "kes!" diye bağırıyorlar. Ne var ki, hareketli bıçak metodu muhtemelen sonsuz sayıda karar gerektirecektir çünkü zamanın her anında her oyuncu evet/hayır kararını vermek zorundadır. Bu yüzden gerçek bir algoritma sayılamaz. Aşağıda bahsi geçen her protokol, birbirinden ayrık kararlar dizisi takip eder.

"Yani protokollere kaldık," dedi Bekir. "Eğer sonsuza kadar beklersek, polis "kesin" buraya gelecektir."

Yasemin, "Ben olsam çok heyecanlanmazdım," diyerek kendi kendine homurdandı.

Kazım, masanın altından Yasemin'i tekmeledikten sonra hikayesini anlatmaya devam etti. "1960'ların başlarında John Selfridge ve Horton Conway diğerlerinden bağımsız olarak, üç kişi için çalışan hasetsiz bir protokol bulmuşlardı."

Bu yöntem, dinlence ve eğlence amaçlı matematiğin meraklıları arasında gayri resmi bir şekilde dolaştı ve sonunda da Martin Gardner'in *Scientific American*'daki "matematiksel oyunlar" köşesinde kendine yazılı bir yer buldu. Şöyle işler:

1. Bekir pastayı üç (adil) parçaya böler.
2. Esra ya
   - (Eğer en büyük iki parçanın büyüklüğü birbirine eşitse,) sırasını atlayacak ya da
   - (yukarıdaki gibi bir eşitlik oluşturmak amacıyla en büyük parçayı) kırpacak. Bütün kırpıntılara "artık" denecek ve bir köşede bekletilecek.
3. Yasemin, Esra ve Bekir (en büyük ya da en büyüğe eşit büyüklükte olduğunu düşündükleri) birer parçayı, belirtilen sırayla seçecekler. Eğer Esra ikinci adımda sırasını atlamadıysa kırpılmış parçayı seçmek zorunda, tabii önce Yasemin seçmezse.
   [Bu aşamada pasta, kırpıntı kısımlar hariç, hasetsiz bir şekilde üç parçaya ayrıldı –"kısmi hasetsiz tahsis" edildi. Bunu kontrol etmesi biraz sürer ama doğru!]
4. Eğer Esra ikinci adımı atladıysa geriye kalan kırpıntı yoktur ve işimiz burada biter. Yok atlamadıysa, ya Esra ya da Yasemin kırpılmış parçayı alır. Bu kişiye "kesmeyen" diyelim, diğerinin adı da "kesen" olsun. Kesen kırpıntıları (eşit olduğunu düşündüğü) üç parçaya ayırır.
   [Bekir'in kesmeyen üzerine "geri dönülmez" şöyle bir avantajı vardır. Kesmeyen kırpılmış parçayı almıştı, bunların üstüne bütün kırpıntıları alsa da Bekir hala daha onun, adil olandan fazla bir pay almadığını düşünecek çünkü Bekir, en baştan beri bütün parçaların adil olduğunu düşünüyor. Yani, artık kırpıntılar paylaşılıyor *olsa da* Bekir kesmeyene haset etmeyecektir.]
5. Üç artık kırpıntı parçası oyuncular tarafından şu sıra ile seçiliyor: kesmeyen, Bekir, kesen.(Her biri, müsait olan parçalar arasından en büyüğü ya da en büyüğe denk olan birini seçiyor.)
   [Kesmeyen, parçalar arasından ilk seçimi yaptığı için, haset edecek bir sebebi yok. Bekir kesmeyene haset etmiyor çünkü "geri dönülmez" avantajı var; kesene de haset etmiyor çünkü ondan önce seçim yapacak. Kesen hiç kimseye haset edemez çünkü parçaları o kesti.]

"İyi, güzel," dedi sabrı hızla tükenmekte olan Bekir, "ama biz üç değil, dört kişiyiz." Gözlerini karartıp Kazım'a dik dik baktı ve kemerinden irice bir bıçak çıkarıverdi. "Tabii, mecbur kalırsak onu da çözebiliriz."

"Seni temin ederim, öyle bir şeye gerek kalmayacak." dedi Kazım hızlı hızlı. "Sanırım bunların hepsi birkaç sene önce olmuş çünkü o noktadan sonra bu tartışmalar ivme kaybetmeye başlamış. Sonuçta, dört ya da daha fazla kişi için hasetsiz tahsis protokolünün varlığı biliniyordu ama hiç kimse sonlu adımda biten bir protokol bulamıyordu."

Yasemin öne doğru eğildi. "Peki, ne değişti?"

"Bilim yazarı Dominic Olivastro," dedi Kazım. "*The Sciences* dergisi için konu üzerine bir özet hazırladı. Oyun kuramı üzerine kitaplar yazmış, New York Üniversitesinden siyaset bilimci Steven Brams makaleyi okudu ve anında konuya tutuldu. Brams, uzun zamandır İkinci Dünya Savaşı sonrası müttefiklerin Almanya'yı paylaşması gibi, siyasi ve ekonomik adil paylaşım problemlerine hayrandı. Burada aynı soru, soyut matematiksel bir şekilde sunulmuştu."

"Brams üç kişi için hasetsiz bir protokol arayarak işe başladı, Selfridge ve Conway'in zaten böyle bir protokolü bulduklarını bilmiyordu. Onun yöntemi de diğerlerinin yöntemindeki ilk üç adımla aynı kapıya, *kısmi* hasetsiz tahsise çıktı. Ama Selfridge ve Conway'in kırpıntıları paylaşmak üzere kurduğu alengirli yöntemdense, aynı yöntemi tekrar kullandı."

"Ama daha fazla kırpıntı çıkarıp durur." diye itiraz etti Esra.

"Evet ama bunlar ikinci dereceden kırpıntılardır, ilk kırpıntılardan çok daha ufak olacaklardır. Yöntemin üçüncü kez uygulanışı da onların icabına bakar ve böylece devam eder."

"Bu gerçekten bir protokol müdür? Sonlu adımdan sonra durmak zorunda değil."

"Doğru. Ama basitti ve işe yarıyordu."

"Ancak bu kadar oluyor demek ki..."

"Sonunda ortaya çıkan yöntem sonlu adımda *bitiyor,* seni tatmin edecektir. Her neyse, erken başarısı üzerine cesaretlenen Brams, dört kişilik durumu incelemeye koyuldu –ve takıldı."

Bekir bıçağının keskinliğini, parmaklarını kullanarak, manalı bir şekilde kontrol etti ve hırıldadı. Kazım yutkundu ve alelacele devam etti. "Bu noktada, Union College, Schenectady'deki matematikçi arkadaşı Alan Taylor ile irtibata geçti. Taylor öğrencilerini dönem sonu sınavı yaparken soru üzerine düşündü, bir beyefendi gibi kırpıntıların çok önemli olmadığı varsayımını kabul ederek; soruyu çözdü. Çözümü garipti çünkü ilk adım –dört oyuncu olmasına rağmen– pastayı beş parçaya bölmekti."

"Bu, etraflıca düşünme sanatının ilginç bir örneği olmuş."

"Doğrudur. Taylor fikrin nereden geldiği hakkında hiçbir fikri olamadığını kabul eder."

İşte Taylor'ın kısmi hasetsiz dört kişilik protokolü:

1. Bekir pastayı (eşit olduğunu düşündüğü) beş parçaya böler.
2. Esra, gerektiği takdirde iki parçayı kırparak üç parçanın (kendince) en büyük olma unvanını paylaştığı bir durum oluşturur ve kırpıntıları bir köşeye ayırır.
3. Yasemin, eğer gerekiyorsa bir parçayı kırparak iki parçanın (kendince) en büyük olma unvanını paylaştığı bir durum oluşturur.
4. Kazım ilk seçer, sonra Yasemin, sonra Esra ve Bekir de en son kalan parçayı alır. Eğer Yasemin ya da Esra bir parçayı kırptıysa, seçtikleri anda böyle bir parçanın müsaitliği durumunda, o parçayı seçmek zorundadırlar.

Her oyuncunun kendi parçasının hiç olmazsa en büyükle eşit büyüklükte olduğunu düşündüğünü görmek çok da zor değil, bu sebeple tahsis hasetsizdir.

"İyi, bunların hepsi çok güzel de," dedi Bekir. "Sorunu tam olarak çözmüyor değil mi Kazım?".

"Hayır. Selfridge ve Conway'in protokolü sonludur: sonsuza kadar devam etmez. Ama Brams'in kırpıntılara karşı gösterdiği beyefendice yaklaşım –sürekli tekrar et– gerçekten de sonsuza kadar gider, bu yüzden, kesin konuşmak gerekirse, sahici bir protokol bulmuş değillerdir. Bu, Brams'in canını çok sıkmaz –siyaset biliminde açıklar her zaman vardır ve birkaç pasta kırpın-

tısı pek de önemli sayılmaz– ama bir matematikçi olan Taylor'ın canını sıkar. William Zwicker ve Fred Galvin isimli iki arkadaşının yardımıyla seçimlerin sırasını, bir tek kırıntı bile kalmadan sonlu adımda bitecek şekilde yeniden düzenleyinceye kadar aylarca karınca gibi çalışır."

Sonuçta ortaya çıkan protokol, dört oyunculu durumda bile aşırı karmaşık: 20 adımda tamamlanıyor ki bu adımlardan biri, sırayla çeşitli oyuncular tarafından gerçekleştirilen uzun bir kırp-ve-seç kararlar dizisi. Karmaşıklığı sebebiyle, yöntem ayrı bir kutu içerisinde açıklanmıştır. Protokolün aşamalarından ikisinde, çeşitli oyuncuların parça büyüklükleri hakkındaki öznel görüşlerine bağlı sayılar seçilmektedir, bu yüzden toplam adım sayısı oyuncular tarafından yapılacak belli bazı tercihlere dayanmaktadır. Bu tercihler ne olursa olsun, adım sayısı her zaman sonludur ama protokol, başlangıç tercihleri uygun bir şekilde ayarlanarak, isteğimiz kadar uzatılabilir. Esasen Taylor tarafından bulunan kısmi tahsisin aksine, daha alışılmış bir şekilde, pastanın en başta dört parçaya ayrıldığına dikkatinizi çekmek isterim. Ne var ki oyuncu sayısından daha fazla parça kullanma fikri yine karşımıza çıkar. Hatta beş parçalık esas protokolün kendisi de kırpıntıların art arda paylaşıldığı uzunca bir bölüm içerisinde, bütünlüğünü bozmadan bulunmaktadır.

Bekir, Esra, Yasemin ve Kazım, Brams-Taylor protokolü üzerinden çalışmaya koyuldular. Yaklaşık iki saat sonra masanın üstü, karalanmış hesaplamalar içeren sayfalarca kağıttan geçilmiyordu. Bekir, tek parça büyük bir yakuta dik dik bakıyordu.

Kaçar Kazım'a yan yan bakarken, "Sanırım bunu on iki parçaya ayırmamız gerekecek," dedi.

"Evet, tabii –protokol pastalar ya da istediğin kadar parçalayabileceğin herhangi bir obje üzerinde sorunsuzca çalışıyor." Bekir'in yüzündeki ifadeyi fark etti. "Ah, parçalanamayacak objeler içeren problem çok daha zor ve hiç çözümü de olmaya..." Korku içinde inildedi. "Ah, Bekir, Tekinsiz Tekin o elması sen göz açıp kapayıncaya kadar dört parçaya ayırıverir."

"Tekinsiz Tekin'i karıştırma şimdi," dedi Bekir "Değerli za-

manımızın büyük bir parçasını heba ettin Kazım, sinirim bozuldu. Polis bizi bulmak üzere olabilir ve yakınımızdalarsa da hepsi senin..."

Durdu. Uzaklardan gelen siren sesini duyuyorlardı.

Ses, git gide yükseliyordu.

Bekir, Esra ve Yasemin'e döndü. "Orantısız ve amansız bir tahsisin zamanı geldi sanırım." Bıçağını Kazıma doğrultu. "Ben keseyim," dedi.

Yasemin de "Tamam, biz de seçelim."

●●

DÖRT KİŞİ İÇİN BRAMS-TAYLOR PROTOKOLÜ

1. Esra pastayı dört (adil) parçaya böler ve her oyuncuya birer parça verir.
2. Bunun üzerine, Bekir, Yasemin ve Kazım'a, bu tahsise bir itirazları olup olmadığı sorulur (ki bir başka oyuncuya haset ediyorlarsa itiraz edeceklerdir).
3. Eğer hiç kimsenin itirazı yoksa dur.
4. Diğer durumda, itiraz eden ilk oyuncuyla çalışılır. Farz edelim ki bu kişi Bekir olsun. Bekir haset ettiği bir parçayı seçer ve bu parçaya A ismini verir, esasen ona düşen parçanın ismi de B olsun.
5. Bekir 10'dan büyük ya da eşit bir p sayısı seçer (Bu p sayısı aşağıda anlatılan ilginç özelliği sağlayacak şekilde seçilir. Farz edelim ki A, rasgele bir şekilde p parçaya bölünsün. Bekir, en küçük 7 parça A'dan çıkarıldığında bile, A parçasını B parçasına tercih eder. Bekir'in A'ya biçtiği değere a, B'ye biçtiği değere de b dersek, $p>7a(a-b)$ olacak şekilde seçmek yukarıda bahsi geçen özelliğin sağlanması için yeterli olacaktır.)
6. Esra, A'yı da B'yi de (eşit olduğunu düşündüğü) p parçaya ayırır.
7. Bekir B'nin (en küçük) üç parçasını seçer ve bu parçaları S_1, S_2, S_3 olarak isimlendirir.

   Ayrıca aşağıdakilerden birisini de yapar:

   •A'nın (en büyük) üç parçasını (eğer bunların hepsinin S'lerden büyük olduğuna inanıyorsa) seçer ve en fazla iki tanesini (en

küçük olan parçanın boyuna gelinceye kadar) kırpar ya da
•A'nın (en büyük) parçalarından birini üç (eşit) parçaya ayırır.
Hangi yolu seçerse seçsin, elde ettiği üç parçaları T_1, T_2, T_3 olarak isimlendirir.

8. Yasemin, toplamda altı parça olan S'leri ve T'leri alır ve
•pas geçer (eğer en büyük parça olma unvanını iki parçanın paylaştığını düşünüyorsa) ya da
•(en büyük parçayı) kırpar (ve yukarıdaki gibi bir eşitlik durumu oluşturur).
9. Kazım, Yasemin, Esra ve Bekir, aynen de bu sırayla, toplamda altı parça olan S'ler ve T'lerden, sekizinci adımda yapılan değişiklikler sonrası (en büyük olduğunu düşündükleri) birer parça seçerler. Yasemin eğer kırpma yaptıysa ve o parça alınmamışsa, kırpılan parçayı almak zorundadır. Esra S'lerden birini, Bekir de T'lerden birini seçmek zorundadır.
Bu adımda birçok artık kalmış olsa da Bekir'in, parçasının Esra'nınkinden -x kadar diyelim- büyük olduğunu düşündüğü hasetsiz kısmi bir tahsis gerçekleştirmiş bulunuyoruz.
10. Bekir (L'ye Bekir'in artıklara biçtiği değer dersek, $\left(\frac{4L}{5}\right)^q < x$ olacak şekilde) bir q tam sayısı seçer. q değerini şimdiden seçmek, bir sonraki aşamanın sonsuza kadar devam etmesini engeller.
11. Bekir artıkları beş parçaya ayırır (Taylor'ın esas fikrinden yadigar).
12. Esra, (kendince) üç tane birbirine eşit en büyük parça yaratmak amacıyla, eğer gerekliyse, en fazla iki parçayı kırpar ve kırpıntıları bir kenara ayırır.
13. Yasemin, (kendince) iki tane birbirine eşit en büyük parça yaratmak amacıyla, eğer gerekliyse, bir parçayı kırpar.
14. Önce Kazım seçiyor, sonra Yasemin, sonra Esra ve Bekir de en son kalan parçayı alıyor. Eğer Yasemin veya Esra parça kırpmışlarsa ve sıra kendilerine geldiğinde o parça duruyorsa, onu seçmek zorundalar.
15. 11-14 adımları q−1 kere yeniden tekrarlanıyor ve her seferinde bir önceki döngüden kalan kırpıntılar pay ediliyor.

Bu alt paylaşımlar döngüsü sonunda elimizde, Bekir'in Esra'ya karşı geri dönülmez bir avantajı olduğuna inandığı (kendi payının Esra'nın payı artı bütün artıklardan fazla olduğunu düşünüyor) hasetsiz kısmi bir tahsis vardır. Şimdi, oyuncu ikililerinden oluşan bir geri dönülmez avantaj listesini, (Bekir, Esra)'dan oluşan liste olarak başlatıyoruz. (Bu adımın tekrarı durumunda gelen yeni ikililer, mevcut listeye eklenecek.) Bu bize, Bekir'in Esra'ya karşı geri dönülemez bir avantajı olduğunu hatırlatacak.

16. Esra artıkları 12 (eşit) parçaya böler.
17. Diğer üç oyuncudan her biri, eğer bu parçaların eşit büyüklükte olduğuna inanıyorlarsa "yandaş", inanmıyorlarsa da "karşıt" olarak ilan ediliyorlar.
18. Eğer her yandaşın bütün karşıtlara karşı geri dönülemez bir avantajı varsa (listeden kontrol ederek) 12 parçayı yandaşlara eşit sayıda parça vererek dağıtıyor ve duruyoruz. (İşte bu yüzden 12 parçaya böldük: 1, 2, 3 ve 4 e bölünen en küçük sayı.)
19. Tersi durumda, elimize ilk gelen ve listede olmayan (yandaş, karşıt) ikilisini seçiyor ve 4. Adıma, yandaş oyuncuyu Bekir rolüne koyarak dönüyoruz, karşıt da Esra rolünde olacak ve artıklar pasta yerine konulacak.
20. 5-18 arası adımları, her (yandaş, karşıt) ikilisi geri dönülemez avantaj listesine girinceye kadar (en fazla 15 tur) tekrar tekrar uyguluyoruz: bu noktada döngü 18'inci adımda duracaktır.

Bu yöntemin işe yarayacağını gösteren eksiksiz ispat için, Brams ve Taylor tarafından yazılmış ek kaynaklar listesindeki makaleyi inceleyebilirsiniz.

13

Kareleri Kareleyelim

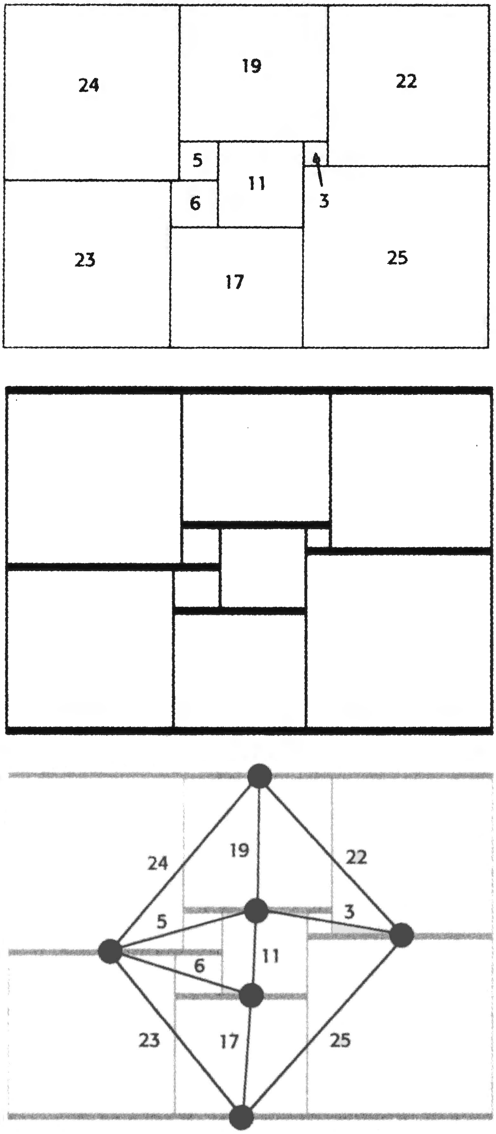


Daireleri karelemek problemi antik Yunanlara kadar gitse de kareleri karelemek oldukça yeni bir sorun. Bir kareyi kare taşlar kullanarak, döşeyebilir misiniz? 64 ufak karenin bir büyük kareyi döşediği satranç tahtasını düşünüp, "kolay" diyebilirsiniz. Ne var ki fazladan bir şartımız var: bütün döşeme parçaları farklı boyutlarda olacak. Peki, bu iş nasıl çözülür? Tabii ki de elektriksel devre teorisi kullanarak.

Her birinin boyutu birbirinden farklı kare döşemeler kullanarak bir kareyi döşeyebilir misiniz? Kolaymış gibi görünür –deneyin de görün. Ama hepsini denediğinizden emin olamayacağınız kadar çok permütasyon olmasına rağmen, o kadar az düzenleme çalışıyor ki daha sistematik bir yaklaşıma gerek var. Bu konuyla ilgili kayda değer en eski sonuç 1903'de ortaya çıkmış ve 1939'a kadar da gerçek bir cevap bulunamamış. Sonrasında gelen işler döşeme üzerine fazladan şartlar koymuş ve problemi kareden farklı objelere genişletmiş. Eğlence ve dinlence amaçlı matematikçilerin inceleyebileceği, bu konuyla alakalı birçok açık soru hala daha bulunabilir.

Max Dehn 1903 yılında, eğer bir dörtgen –farklı ya da aynı boyutlarda– karelerle kaplanabiliyorsa, dörtgenin kendi boyutlarının ve karelerin boyutlarının birbirine orantılı olduğunu yani sabit bir sayının tam sayı katları olduğunu göstermiştir. Başka bir deyişle, eğer uygun bir ölçüm birimi seçersek, bütün kenar uzunlukları tam sayı olur. Bu teorem şimdiye kadar en azından bir düzine farklı şekilde ispatlanmıştır –bu ispatların hepsi de oldukça çetrefillidir, zira bu sonuç hiçbir şekilde bariz sayılamaz.

Bir dikdörtgen ya da kare eğer farklı boyutlarda kare taşlarla döşenebiliyorsa, ona *karelenebilir* denir. 1909 yılında Z. Moron, 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 ve 18 kenar uzunluklu kareler Kullanarak 33×32'lik ilk karelenebilir dikdörtgeni buldu. Ayrıca 65×47'lik



Şekil 45

(a) Moron'un, on döşemeli dikdörtgeni

(b) Yatay doğru parçaları

(c) Smith Diyagramı: her doğru parçasını düğümle ve her köşeyi bir döşemeyle ilişkilendir. Köşelerin üzerine döşemenin kenar uzunluğunu yaz. Akım aşağıya doğru hareket eder.

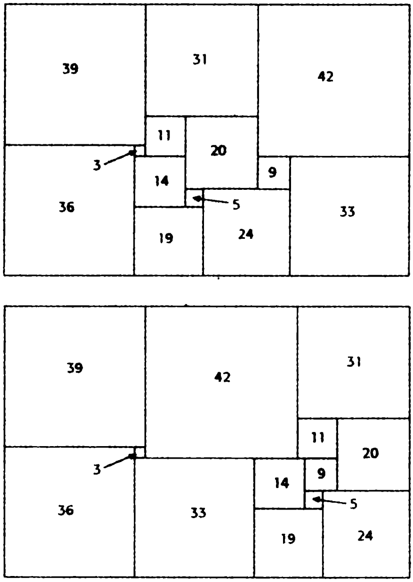
bir dikdörtgeni de kenar uzunluğu 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 ve 25 olan on tane kareyle kaplamayı başarmıştır (Şekil 45a). Dokuz karelik bir küme uydurup bu problemi çözmeye çalışabilirsiniz: cevap için bakınız *Unsolved Problems in Geometry*[1] (Ek Kaynaklar). "Karelenebilir Kare" problemi 1939 yılında, R. Sprague tarafından 55 farklı kare taş kullanarak yapılan bir döşeme ile çözülmüştür. Ne var ki bu çözüm, bir yönüyle zarafetten yoksundu: içinde başka bir karelenebilir dikdörtgen içeriyordu yani, *bileşke* bir çözümdü. İçinde karelenebilir dikdörtgenler içermeyen döşemelere *basit* döşemeler denir ve bu özelliğe sahip karelenebilir kareler bulmak daha da zordur.

1940 yılında R.L: Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone ve W. T. Tutte (Ek Kaynaklar) ilk basit karelenebilir kareyi keşfettiler. Kullandıkları yöntem Martin Gardner tarafından, *More Mathematical Puzzles and Diversions*[2] (Ek Kaynaklar) isimli kitabında eğlenceli bir şekilde tarif edilmiştir. İşe, herhangi bir karelenebilir dikdörtgeni Smith Diyagramı olarak bilinen bir şebeke ile temsil ederek işe başladılar. Karelenmiş dikdörtgendeki her yatay çizgi şebekedeki bir düğümü temsil eder ve her kare döşeme de bir köşe ile ilişkilendirilir. Bu köşe, döşemenin tavan ve taban yatay çizgilerindeki düğümleri birbirine bağlar ve köşeler bu karenin kenar uzunluğu ile etiketlendirilir. Şekil 45b Moron'un karelenmiş karesindeki yatay çizgileri göstermektedir ve Şekil 45c de Smith Diyagramını gösterir.

Fevkalade bir şekilde, eğer her Smith Diyagramındaki her köşe birim, dirence sahip bir kablo parçası olarak görülürse ve sayısal etiketlerde kablolar üzerinden akan akım olarak algılanılırsa (diyelim ki amper olarak ve akım da aşağıya doğru) diyagramın bütünü, elektrik mühendisliğindeki "Kirchhoff Kanunları"na uyan elektriksel bir devre oluşturur. Özel olarak, herhangi bir kesişim noktasına giren toplam akım, çıkan toplam akıma eşit olmak zorundadır. Bu durum döşemenin geometrisinden kolaylıkla çıkar. Örneğin, 19'luk karenin tabanındaki ya-

1- Geometride Çözülememiş Problemler.
2- Daha Çok Matematiksel Bulmaca ve Kafa Dağıtıcılar.

tay çizgiyi ele alalım. 19'luk bir akım girer ve 5+11+3 = 9'luk bir akım çıkar. Bu iki sayının aynı çıkmasının sebebi, söz konusu çizginin aynı zamanda 5, 11 ve 3'lük karelerin tavanını oluşturuyor olmasıdır.



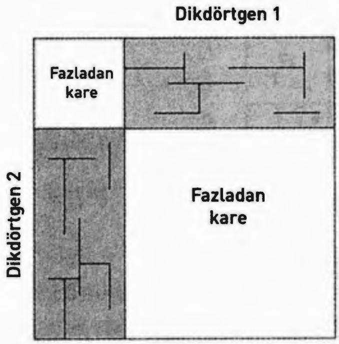
Şekil 46

(a) Brook'un dikdörtgen yapbozu.

(b) Annesinin bulduğu, farklı çözüm.

Dört matematikçi, basit karelenebilir bir kare bulmak amacıyla elektriksel devre teorisindeki fikirleri kullanarak karelenebilir kareler kurmak ve incelemek için sistematik yöntemler geliştirdiler. İlk büyük ilerleme hiç beklenmedik bir yerden geldi. Brooks 112×75'lik bir dikdörtgeni 13 tane döşemeyle karelemiş ve bulduğu sonuçtan öylesine tatmin olmuştu ki bu döşemeleri kullanarak bir "yapboz" hazırlamıştı. Annesi yapbozu şöyle bir denedi ve çözmekte başarılı oldu –ama bulduğu çözüm (Şekil 46b) Brooks'unkinden farklıydı. Matematikçilerden oluşan bu takım, daha önce hiç böyle bir şeyle –aynı dikdörtgeni iki farklı şekilde kaplayan bir döşeme kümesi– karşılaşmamıştı. Ama uzun bir süredir, aynı büyüklükte ortak kareleri olmayan iki farklı döşeme kümesi tarafından kaplanabilen bir dikdörtgen bulmaya çalışıyorlardı çünkü iki tane fazladan kare kullanarak

bu dikdörtgenleri birleştirip, karelenebilir bir kare oluşturmak mümkündü. Bileşke bir çözüm olurdu ama en azından bir başlangıç yapmış olurlardı –ve bu aşamada Sprague bulduklarını daha yayınlamamıştı.



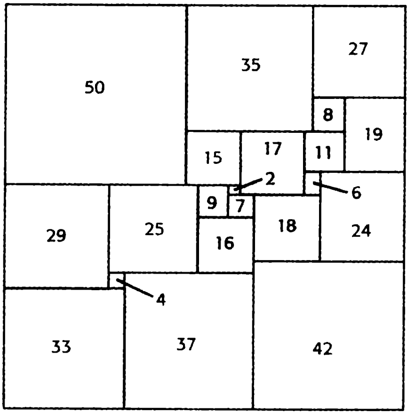
Şekil 47

İki tane karelenmiş dikdörtgen kullanarak karelenmiş bir kare kurmanın yolu, tabii, dikdörtgenlerin aynı boyutta döşemeleri olmaması lazım.

Brook'un dikdörtgeni tabii ki de iki farklı şekilde kaplanabiliyordu ama aynı kaplama kümesi tekrar kullanıldığından karelenebilir bir kareye ulaşamazdı. Yine de Brook'un dikdörtgeninin *neden* iki farklı şekilde kaplanabildiğini anlamayı başarabilirlerse, soruna yaklaşmak için uygun bir açı bulabileceklerini umuyorlardı. İki döşemenin Smith Diyagramlarını incelemeleri üzerine iki düğümü "aynılaştırırlarsa" –yani, varsayımsal olarak aynı olduklarını kabul ederlerse– bir diyagramı ötekisinden çıkarabildiklerini fark ettiler. Daha da ötesi, devre boyunca ilerleyen elektrik akımı, yapay olarak oluşturulan bu "kısa devreden" etkilenmiyordu çünkü bu durumda aynılaştırılan noktalar, aynı elektriksel potansiyeldeydi. Biraz uğraşarak, neden böyle bir durumun gerçekleştiğini buldular –Smith Diyagramındaki simetrilerle bağıntılıydı. Bu ipucunu kullanarak Smith Diyagramıyla uğraşmak için yeni yollar icat ettiler ve daha az sayıda ortak döşemeye sahip, aynı boyutlarda farklı karelenebilir dikdörtgenler buldular. Nihayetinde bu yaklaşım işe yaradı ve onları 69 döşemesi olan basit bir karelenebilir kareye yönlendirdi. Brooks, biraz daha gayretle, döşeme sayısını 39'a indirdi.

1948 yılında T. H. Willcocks bu sayıyı daha da azaltarak 24 döşemeli karelenebilir bir kare buldu. Ama bu kare basit bir kare

değildi. Bu sırada J. W. Bouwkamp ve iş arkadaşları 15 döşemeye kadar mümkün olan bütün karelenebilir dikdörtgenlerin bir kataloğunu oluşturuyorlardı –toplamda 3663 tane buldular. 1962 senesinde A. W. J. Duivestijn herhangi bir basit karelenebilir karenin en az 21 döşemesi olmak zorunda olduğunu gösterdi; 1978'e gelindiğinde böyle bir kareyi bulmuş ve bu özelliği sağlayan yegane kare olduğunu göstermişti (Şekil 48). 1992'de Bouwkamp ve Duivestijn 21 ile 25 arasında döşemesi olan 207 –aslında, bütün– basit karelenebilir kareleri yayınladılar.



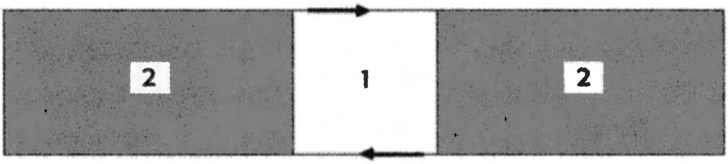
Şekil 48

En az döşeme sayısına sahip yegane karelenebilir kare.

Bu sonuçlar karelenebilir kare sorusunu oldukça inceltmiş olsa da bu problemin birçok türevi vardır. Karelenebilir dominolara –bir kenarı diğerinin iki katı uzunluğunda dikdörtgenlere– ne dersiniz? Böyle bir dikdörtgeni karelemenin oldukça basit bir yöntemi var: karelenebilir bir kareyle başla ve o karenin boyutunda bir kare döşeme daha ekle. Ama böylesine bariz *olmayan* kaplamalar var mıdır? Peki ya bir kenarı diğerinin üç katı olan dikdörtgenlerde ne olur?

Problemin bir diğer genişlemesi de David Gale'in *The Mathematical Intelligencer*'da (Bakınız, Ek Kaynaklar) incelediği üzere, kareler ve dikdörtgenlerden başka yüzeylerin kaplanmasında yatar. Topolojiyle ilgilenenler bazı ilginç yüzeylerin, dikdörtgenlerin farklı kenarlarının aynılaştırılması –birbiri üzerine yapıştırıl-

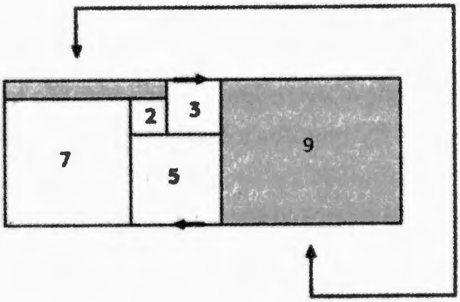
ması– ile elde edilebileceğini bilir, en azından öyle hayal edebilir. Bir dikdörtgen alın ve karşılıklı iki kenarı yapıştırın: işte size bir silindir. Dikdörtgeni yapıştırmadan önce yarım tur kıvırın ve bir Möbius şeridiniz var. İki karşılıklı kenarı da birbirine yapıştırın ama kıvırmak yok ve sonuç olarak elinizde –simit şekilli bir yüzey– torus var. Birine yarım tur kıvrım vererek karşılıklı kenarların ikisini de yapıştırın ve elinizde bir Klein şişesi –üç boyutlu uzayda kendi içinden geçmeden çizilemeyen, ünlü tek yüzlü bir obje– var. İki çifti de yarım tur kıvırın ve elinizde izdişümsel uzay –yine tek yüzlü ve üç boyutlu uzayda temsil edilmesi imkansız bir obje– var.



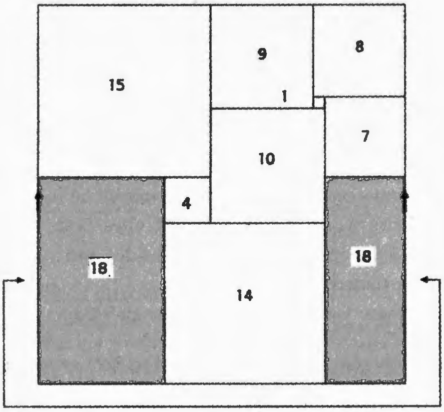
Şekil 49 Möbius şeridini iki tane döşeme ile kaplamak.

Açıkça görülmekteki söz konusu kenar yapıştırma tekniğiyle üretilen objelerin hepsinde, esas dikdörtgenin herhangi bir kaplama kümesi yeni yüzeye de taşınmaktadır. Ama yeni yüzeyin başka kaplamaları da olabilir çünkü bu yüzey üzerindeki kaplamalar, yapıştırılmış olan kenarlar üzerinden de geçebilirler. Örneğin Şekil 49, kenar uzunlukları sırayla 1 ve 2 olan iki tane kareyle kaplanmış Möbius şeridini göstermektedir. Oklar yapıştırılacak olan kenarları göstermektedir, okların yönleriyse yapılacak olan kıvırmaları. Resim üzerinde karelerden biri ikiye bölünmüş gibi görünse de kenarlar yapıştırıldığında o parçalar birleşmektedir. Ne yazık ki Möbius şeridinin bu kaplamasının tatsız bir özelliği var: küçük döşeme, kendi kendisinin sınırında. Tavan ve taban kenarları yapıştırılacak olduğundan kendisi de bir kareden çok Möbius şerididir. 1993'de S.J. Chapman, Möbius halkasının bu garip özelliği göstermeyen bir kaplamasını (Şekil 50) sadece beş döşeme kullanarak buldu. Böyle bir kaplamanın daha az döşeme taşı kullanan hali yoktur.

Aynı döşemenin parçaları, yapıştırılacaklar.



Şekil 50 Möbius şeridinin, sınırları kendi sınırlarıyla kesişmeyen kareler kullanarak kaplanması.



Şekil 51

Silindirin bariz olmayan karelenmesi.

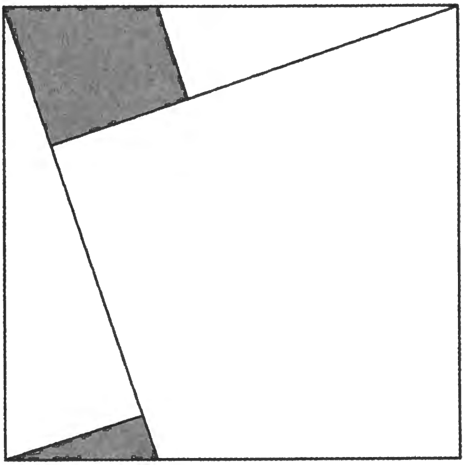
Aynı döşemenin parçaları, gösterildiği gibi yapıştırılacaklar.

Silindirler de karelenebilir ama bu iş, aynı Moron'un dikdörtgeni gibi en az dokuz kare gerektirir. "Bariz" karelemelerin yaptığı tek şey Moron'un dikdörtgenini almak ve uygun kenarlarından yapıştırmaktır; ama iki tane, bariz olmayan dokuz karelik kareleme de mevcuttur. Döşeme taşlarının boyutları Moron'unkilerle aynı olsa da düzenlemeler farklıdır (Şekil 51).

Silindir ve Möbius şeridinde döşeme taşlarının kenarları yüzeyinkine paralel olmak zorundaydı. Ne var ki torus, Klein şişesi ve izdüşümsel uzayda kenar yoktur, haliyle döşeme taşları açılı bir şekilde de yerleştirilebilir. Aslında, böyle bir şey yapılır ve döşemelerin sınırlarının kendi kendisiyle kesişmesine izin veril-

se, bir torusu sadece iki kare kullanarak kaplamak mümkündür (Şekil 52). (Bonus olarak, bu resimde Pisagor teoreminin de bir ispatı saklıdır; görebiliyor musunuz?)

Klein şişesinin kaplamaları hakkında çok bir şey biliniyormuş gibi durmamaktadır. Möbius şeridi, kaplamasıyla beraber alınıp kenarı boyunca (tek kenarı vardır) yapıştırılarak Klein şişesinin bir kaplaması bulunabilir ve altı ya da daha az döşeme taşı kullanarak yapılacak olan kaplamaların hepsi bu şekilde elde edilebilir. Hiç kimse bu iddianın yedi ya da sekiz kareli döşemeler için doğru olup olmadığını bilmiyor –ama dokuz için yanlış.



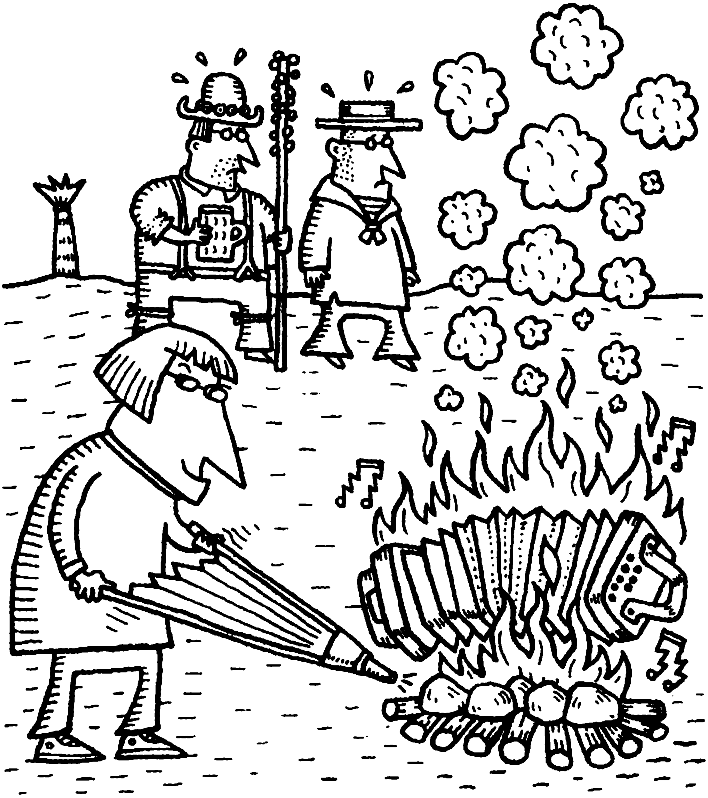
Şekil 52

Torusun, sadece iki kare kullanarak kaplanması –ve bir de Pisagor teoreminin gizli ispatı. (İpucu: hipotenüsü, diyagramın sol taraftaki kenarı olan dik üçgene bakın.)

İzdüşümsel uzayın kaplamaları ile ilgili hiçbir şey bilinmemektedir. Peki ya, mesela küpün kaplamaları hakkında ne denebilir? Bu araştırma alanı baştan sana açık durmaktadır.

14

Körüklü Sanı



Üçgen yüzlü bir polihedron[1] esnetilebilir[2] mi? Genel geçer bilgeliğin aksine, bazı durumlarda esnetilebilir. Klasik matematikçilerin gözden kaçırdığı kayda değer bir formül sayesinde şimdi gösterildi ki eğer bir polihedron esnetilebilirse, hacmi değişmez. Peki ya, akordeonlar nasıl oluyor da çalışıyor?

1- Çok yüzlü, üç boyutlu kapalı obje. Örnek: küp, piramit, prizma.

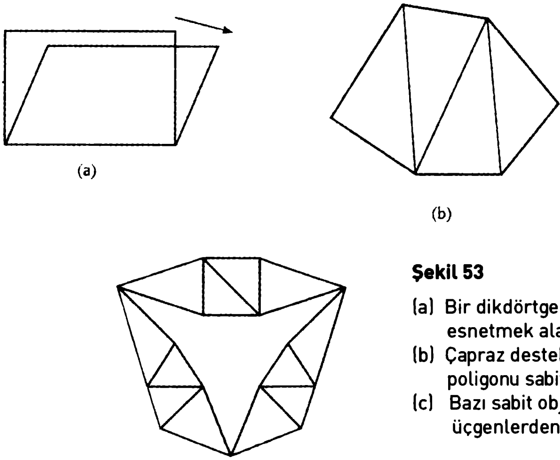
2- Burada bahsedilen "esneklik" şöyle hayal edilebilir: Çok ince tahta plakaları kenarlarından (elastik ama kopmayan bir yapıştırıcıyla) yapıştırıp serbest bıraktığınızda sabit durur mu?

Bir kitaplık inşa etmeye çalışmış her amatör marangoz bilir ki dikdörtgenler esnetilemez objeler değillerdir. Eğer dikdörtgenin bir köşesine baskı uygularsanız, yana doğru yamularak paralelkenara dönüşecektir (Şekil 53a) –ve muhtemelen de tamamen yıkılacaktır. Öteki taraftan üçgen, esnetilemez*dir*: en azından bir kenarın uzunluğu değişmeden yamultulamaz. Öklid bunun farkındaydı: "eğer iki üçgenin kenar uzunlukları eşitse, bu üçgenler eşleşikdir (şekilleri aynıdır)". Aslında, düzlemde esnetilemez *tek* poligon[1] üçgendir. Diğer bütün poligonlar bir şekilde sabitlenmek zorundadır. Örneğin, çapraz destekler eklenerek üçgenlere bölünebilirler (Şekil 53b) ya da zaten esnetilemez olan objelerin birleşiminden oluşuyor olabilirler (Şekil 53c).

Kitaplığınızı esnetilemez hale getirmek için bir başka yol da arka kısmına düz bir plak çakmaktır. Bu işlem elimizdeki problemi, her şeyin daha ilginç olduğu ve sürprizlerin az ilerideki köşede beklediği, üç boyuta taşır. Matematikçiler yaklaşık 200 sene boyunca esnetilemeyen objelerle ya da belki, poligon yüzeylerin kenarlarından birleştirilerek oluşturulan üç boyutlu objeler olan polihedronlarla uğraşıp durmuşlardır. Yakın bir zamana kadar üçgen yüzlü polhedronların esnetilemez olduğu varsayılıyordu –ama çok doğru bir varsayım değilmiş. "Esnetilebilir" polihedronlar yani herhangi bir yüzü yamulup eğilmeden şekil değişebilen objeler, vardır– birazdan onlara da geleceğim.

1- Çok kenarlı, iki boyutlu kapalı obje.

Robert Connelly (Cornell), Idzhad Sabitov (Moskova Devlet Üniversitesi) ve Anke Walz (Cornell) grubunun yaptığı son keşif, esnetilebilir polihedronların hacimlerini değiştiremeyeceğini gösteriyor. Bir "körük" polihedronu yapıp onu esneterek, iç hacmi azalırken bir ucundan hava püskürtmek mümkün değil. (Peki ya akordeonlar? Aşağıya bakınız.) Yaptıkları ispat polhedronların bazı beklenmedik özelliklerini keşfetmelerini sağladı ki bu özellikler ilerideki araştırmalar için de önemli olacakmış gibi duruyor.



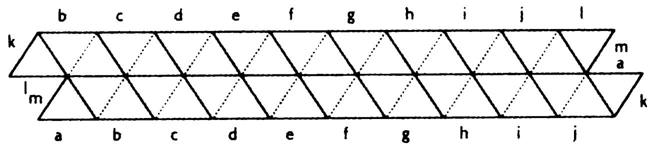
(a) (b) (c)

Şekil 53
(a) Bir dikdörtgeni esnetmek alanını değiştirir.
(b) Çapraz destekler bir poligonu sabitleyebilir.
(c) Bazı sabit objeler, üçgenlerden oluşmayabilir.

İşin matematiğine girmeden önce bir şeyi açıklığa kavuştursam iyi olacak. Kağıttan origami şekilleri yapmış herkes bilir ki kanatlarını çırpan kuşlar, bacakları hareket eden kurbağalar ve buna benzer objeler yapmak mümkündür. Bunlar esnetilebilir polihedronlar değiller midir? Cevap, iki sebepten ötürü "hayır". Sebeplerden biri kağıdın köşeleri olması, haliyle de polihedron oluşturmamasıdır. Diğeri ve daha önemli olan sebepse, kağıttan kurbağa bacaklarını hareket ettirirken kağıdın kendisi, azıcıkta olsa *eğilir.* Aynısı, ilk bakışta polihedron bir körükmüş gibi duran akordeonlar için de doğrudur ama çalışmasının sebebi yine, azıcık bir eğilmedir (ve belki biraz da gerilme). Bu noktadan sonra bütün eğilme miktarları, bir mikronun trilyonda biri bile

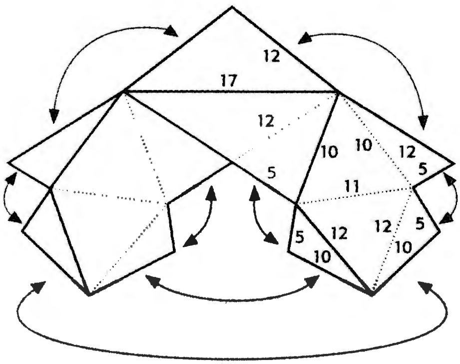
olsa yasak. Bir polihedron esnediğinde değişebilecek olan tek şey yüzeylerin birleştiği açılardır. Yüzeylerin kenarları boyunca menteşelendiğini hayal edin ve menteşelerin hareket edebildiğini düşünün. Diğer her şey muhteşemlik derecesinde sabit.

Bütün bu çalışma alanı 1813 senesinde, ünlü Fransız matematickçi Augustin Louis Cauchy'nin, konveks –içe doğru girintisi olmayan– bir polihedronun esnetilemeyeceğini ispatlamasıyla başlar. Peki ya girintisi varsa? Konveks olmayan ilk esnetilebilir polihedron Fransız mühendis Raoul Bricard tarafından bulunmuştur ancak, onun örneğinde yüzeylerin serbestçe birbirinin içinden geçmesine ve kesişmesine izin verilmiştir. Bu, tabii ki de gerçek fiziksel bir obje için mümkün değil. Ne var ki Bricard'ın örneği, yüzeyleri kaldırıp kenarlar yerine eğilmeyen çubuklar koyarak elde edilen ve *bağıntı* olarak isimlendirilen geometrik yapı sayesinde gerçekleştirilebilir. Bricard ayrıca polihedronları uç uca zincir şeklinde birleştirerek oluşturulan basit ve esnetilebilir objelerde bulmuştur. W. W. Rouse Ball'un ünlü, *Mathematical Recreations and Essays* (Ek Kaynaklar) kitabına göre bu tür halkaların en basitleri J.M. Andreas ve R.M. Stalker tarafından bulunmuştur. Bunlar, dört ya da daha fazla –ama her zaman çift sayıda– düzgün tetrahedrondan (dört yüzlü) oluşan ve karşılıklı kenarları boyunca menteşelenmiş objelerdir (Şekil 54). Altı adet tetrahedronla elde edilebilecek esneme miktarı çok az olsa da sekiz ya da daha çok terahedronla elde edilen halkalar, aynı duman halkaları gibi sonsuza kadar döndürülebilir. 22 ya da daha çok tetrahedrolaysa halka üzerinde düğümler bile atılabilir! Ne var ki böyle şekiller aynı kenar üzerinde ikiden fazla yüzey birleştiğinden gerçek polihedron değillerdir.



Şekil 54

On tetrahedronluk bir halka. Düz çizgileri sırt, kesik çizgileri de vadi olacak şekilde katlayınız. Aynı harf ilikleri birbirine yapıştırınız.



Şekil 55
Steffen'in esnetilebilir polihedronu. Düz çizgileri sırt, kesik çizgileri de vadi olacak şekilde katlayınız.

Connelley 1970'lerde, Bricard'ın kendi kendini kesen esnetilebilir polihedronunu alıp esnetilebilir olmayı korurken kendi kendini kesmeyecek bir hale getirince, konu bir anda hızlandı. Birkaç sene içerisinde de Düsseldorf Üniversitesindeki Klaus Steffen tarafından, dokuz köşeli ve 14 yüzlü (Şekil 55) esnetilebilir polihedrona indirgendi. İnce kağıttan bir model yapıp nasıl esnediğine bakmak eğlenceli oluyor. Bilindiği kadarıyla, bu mevcut olan en basit esnetilebilir polihedrondur ama böyle bir ifadenin nasıl ispatlanacağını öngörmek pek de basit değil.

Bu ve buna benzer esnetilebilir polihedronları inceleyen matematikçiler hızla fark ettiler ki esnetmeler sonucu bazı parçalar birbirine yaklaşırken bazıları da uzaklaşıyordu. En azından niteliksel olarak, hareketler sırasında hacim değişmiyor gibiydi. New York Şehir Üniversitesinden Dennis Sullivan esnetilebilir bir polihedronu dumanla doldurdu, esnetti ve dışarıya duman çıkmadığını gözlemledi. Bu nazik ama kabataslak deney şöyle bir sonucu öneriyor –ama tabii ki ispatlamıyor– ki hacim sabit kalmıştır. Körüklü Sanı böylece doğmuştur. Bu sanıya göre esnetilebilir polihedronların hacmi, esnetildiği sırada değişim göstermez, sabit kalır –polihedral körük diye bir şey olamaz.

Körüklü sanının ilk ilginç özelliği düzlemsel denginin yanlış olmasıdır. Dikdörtgen gibi esnetilebilir bir poligon, bir paralelkenar olacak şekilde devrildiğinde alanı küçülür. Açıkça görülü-

yor ki üç boyutlu uzayda körüğü imkansız kılacak, alışılmadık bir sebep var. Ama ne? Connelley'in çalışma gurubu, Arşimet'e ait olduğu düşünülen ama genellikle, bir ispatını yazmış olan İskenderiyeli Heron'a atıf edilen ünlü bir üçgen alan formülüne odaklandı. Heron, M.Ö. 100 ile M.S. 100 arasında bir zaman diliminde yaşamış Yunan matematikçi, formülü *Dioptra* ve *Metrica* isimli kitaplarında ifade edip, ispatlamıştır. Formül aşağıdaki kutuda bulunabilir ama burada esas önemli olan şey detaylardan çok formülün genel içeriğidir. Cebir kullanarak yeniden düzenlenip, bir üçgenin kenar uzunlukları ve alanı arasında ilişki kuran bir denklem haline getirilebilir. Daha da ötesi, bu denklem bir polinomdur: terimleri, değişkenlerin tam sayı kuvvetlerinin sabit sayılarla çarpılmasıyla elde edilir.

Heron'un Formülü

Farz edelim ki bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve alanı da x olsun. Yarım-çevreye S ismini verelim:

Şu halde,

Alan x'i, kenar uzunlukları a, b, c ile ilişkilendiren bir polinom.

$$x = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Bu denklemin karesini alıp 1/2'lerden kurtulmak için yeniden düzenleyin, sonuç:

$$16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2c^2 = 0$$

Sabitov, ilginç –ve ilk bakışta pek mümkünmüş gibi görünmeyen– *herhangi* bir polihedronun hacmini kenar uzunluklarıyla ilişkilendiren benzer bir formülün var olabileceği fikrini ortaya attı. Bugüne kadar kimse böyle bir polinomun var olabileceğini düşünmediğinden, gerçekten de takdire şayan bir bulgu

olurdu. Evet, küp ve dikdörtgen kutular gibi basit objeler için gayet iyi bilinen bazı özel formüller ve tetrahedronlar (dört tane üçgen yüzü olan, üçgen tabanlı piramitler(düzgün ya da değil)) için bilinen, Heron'unkine benzer ama daha dağınık bir formül vardı. Ama her polihedrona uygulanabilecek, tamamen genellenmiş bir şey yoktu.

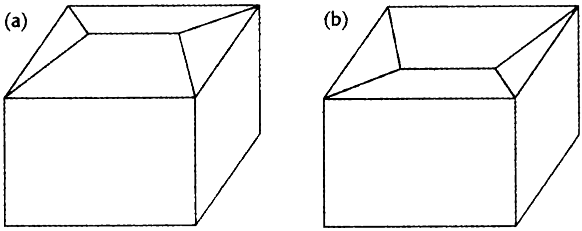
Geçmişin büyük matematikçileri gerçekten de böylesine muhteşem bir fikri es geçmiş olabilirler miydi? Olasılık dışıymış gibi geliyor.

Yine de böyle bir formülün var *olduğunu* farz edelim. O zaman Körüklü Sanı basit bir sonuçtan başka bir şey değil. Sebebi oldukça bariz. Formül, hacmin sadece kenarlara bağlı olduğunu gösterecek. Polihedron esnerken kenar uzunlukları değişmez –bu yüzden de formül aynı kalır. Çözümü olan hacim, sabittir.

Aslında, bahsetmemiz gereken teknik bir nokta var. Bir polinom denkleminin *birden fazla* çözümü olabilir yani prensipte hacim, bir anda bir çözümden diğerine atlayabilir. Ne var ki esnetme *azar azar* gerçekleşeceğinden, hacmin de azar azar değişmesi gerekir ve sıçrama yapamaz. İspat burada biter.

Bunu ilk yazdığımda, bazı okurlar bu sonucun doğru olamayacağını söylediler. Örneğin, kutu şeklinde ve normal çatılı bir ev yapıp, çatıyı ters yüz ederseniz (Şekil 56) kenar uzunlukları aynı kalır ama hacmi daha azdır. Doğrudur ama benim akıl yürütmemi yanlış çıkarmaz. İlk olarak, aynı kenar uzunlukları (bu örnekte olduğu gibi) birden fazla polihedrona ait olabilir çünkü biraz önce bahsedildiği üzere bir polinomun birden fazla çözümü olabilir. Çözüm sayısı sonlu olmak zorundadır ama polinomun derecesi ne kadar büyükse, çözüm sayısı ona göre artabilir. İkinci olarak, normal evi ters yüz eve, yüzeyleri yamultup germeden sürekli bir şekilde dönüştüremezsiniz. İtiraz reddedilmiştir!

Her neyse, bir polihedronun hacmini, kenar uzunluklarıyla beraber polinom şeklinde ifade etmeyi başarabilirsek problem çözülmüş olur. Başlamak için çok bariz bir nokta var: en basit polihedron olan tetrahedronun, klasik formülü. Her poligonun



Şekil 56

(a) Çatılı ev.
(b) Ters çatılı ev. İkisini kenarları aynıdır ama hacimleri farklıdır.

üçgenlere ayrılabilmesi gibi, her polihedron da tetrahedronlara ayrılabilir. Şu halde polihedronun hacmi, bileşenleri olan tetrahedronların toplam hacmine eşittir. Ama bu yaklaşım, kendi başına problemi çözemez. Buradan çıkacak olan formül bütün parçaların bütün kenarlarını içerecektir ama bu kenarların çoğu esas polihedronun kenarı değildir. Onun yerine, bu kenarların çoğu, polihedronun bir köşesinden diğerine geçen "köşegenler"dir ki bu uzunluklar esnetme sırasında gayet de güzel değişebilir. İşte bu yüzden formülün cebirsel olarak yoğrulup, istenmeyen köşelerden kurtulması ve bütün bileşke denklemler "yapıştırılarak", Muazzam Birleştirilmiş Denklemin oluşturulması gerekir.

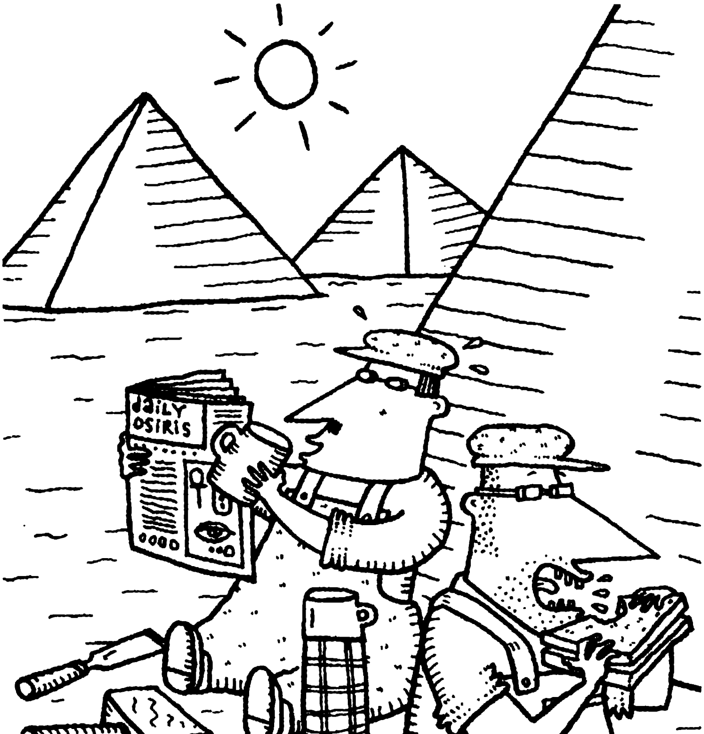
Mutlaka dağınık ve karmaşık bir iş olacaktı. Sekiz tane üçgen yüzü olan bir oktahedron için böylesi bir yoğrulma prosedürünün mümkün olduğu ama sonuçta ortaya çıkan denklemin, hacmin 16'ıncı kuvvetini de içerdiği anlaşıldı. Daha karmaşık polihedronlar tabii ki de daha yüksek kuvvetlere gereksinim duyacaklardı. Yine de oktahedron iyi bir başlangıçtı. 1996 senesine gelindiğinde Sobitov, uygun denklemler bulabilmek için açık ama oldukça karışık bir prosedür yazabiliyordu. 1997'de Connelly, Sabitov ve Walz, aynı sonucu elde etmelerini sağlayan çok daha basit bir yol buldular.

Böyle denklemlerin varoluş sebepleri tam olarak anlaşılabilmiş değil. Zaten, iki boyutta da yoklar –sabit üçgen ve Heron denklemi hariç. Üç boyutta var olduklarını şimdi biliyoruz. Connelly ve Walz, dört boyutlu bir Körüklü Sanıyı nasıl ispatla-

yacaklarını bildiklerini düşünüyorlar. Beş ve daha fazla boyutlar için problem tamamen açık. Ama birkaç kağıt parçası ve biraz dumanla yapılmış basit bir deneyin, tamamen beklenmedik ve temelde matematiksel, harikulade bir keşfe ön ayak olduğunu görmek, büyüleyici. Ayrıca, geçmişteki büyük matematikçilerin keşfetmiş olabilecekleri ama keşfetmedikleri bazı basit fikirler de *vardır!*

15

Amaçsal Piramit Yığılımı



Bir piramidin inşaatı için kaç kişi gerekir? Tahminen, bir ampul değiştirmek için gerekenden daha fazla. Yeterli zaman verildiğinde bir adam da yapabilir ama bir milyon işçi, eğer birbirlerinin ayağına bağ olmazlarsa, daha çabuk bitirir. Doğru cevap ikisinin arasında bir yerde olsa gerek –ama tahminen ne kadar büyük bir sayı? Romalı tarihçi Herodotus, Büyük Piramit'in 100.000 köle kullanılarak yapıldığını iddia etmiştir. Arkeoloji, işçilerin köle olmadıklarını gösteriyor. Matematik de 100.000 sayısının imkansız büyük olduğunu. Bütün mesele, gerekli olan enerji miktarında.

Antik Mısırın piramitleri, arkeolojik gizemler arasında en esrarengiz olanlardandır. Aralarından birkaçı muazzam büyüklüklerdedir. Khufu'nun Gize'deki "Büyük" piramidi ki MÖ 2500 civarında yapılmıştır, esasen 7 milyar kilogram kütleye ve 2,5 milyon metreküp hacme sahipti. Piramitler devasa taş bloklardan yapılmıştır, bu bloklar taş ocağından çıkarılıp, nispeten düzgün bir hale yontulmuş, inşaat alanına taşınmış ve birbirlerinin üstüne hayret verici hassaslıkla istiflenmiştir.

Antik Mısırlılar böylesine engin yapıları nasıl bir araya getirmişlerdi? Ne işe yararlardı? Nasıl inşa edilmişlerdi? Bu soruların cevabını, açık bir şekilde bilmiyoruz –yine de birçok piramidin krallar için mezar olarak kullanıldığını biliyoruz ve piramitlerin inşası hakkında da birçok teori var. Ne var ki Denver Doğal Tarih Müzesi'nden Stuart Kirkland sağ olsun (Ek Kaynaklar), işgücünün büyüklüğü hakkında oldukça iyi bir fikrimiz şimdi var.

Romalı tarihçi Herodot, piramitler inşa edildikten yaklaşık iki bin sene sonra, Büyük Piramidin inşası için 100.000 adam kullanıldığını yazmıştı. Ne var ki Herodot güvenilir bir kaynak değildir ve şimdi anlaşılıyor ki işgücüne, gerçeğinden 10 kat fazla değer biçmiştir. Weir'e göre sayı muhtemelen –şaşırtıcı derecede ufak olan– 10.000 civarındaydı. Piramitlerin nasıl inşa edildiğini net olarak bilmememize rağmen, nasıl oluyor da işçi sayısı hakkında bu kadar emin olabiliyoruz? Mısırlıların işlerini

nasıl yürüttükleri hakkında birkaç makul varsayımda bulunur ve tamamen kifayetsiz olmadıklarını kabul edersek, işgücünün büyüklüğüne birkaç basit matematiksel ilke kullanarak yakınsayabiliriz.

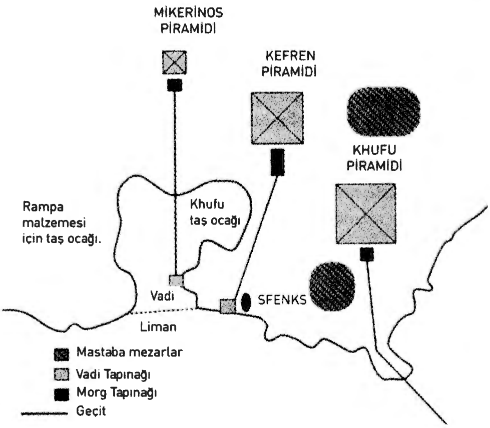
Wier, belirlilik açısından, Keops piramidi üzerinde çalışmıştır ama aynı yöntem; benzer sonuçlar vermek üzere öteki piramitlere de uygulanabilir. Temel fikir bir piramidin ne kadar enerji ihtiva ettiğini incelemekten geçer. "Enerji" derken kastettiğim şey "potansiyel enerji" –belirli bir kütleyi, yerçekimine karşı belirli bir yüksekliğe çıkarmak için gerekli olan gayret miktarıdır. Eğer piramitteki potansiyel enerjiyi piramidi inşa etmek için gerekli olan gün sayısına bölersek, blokları kaldırmak için gerekli olan günlük ortalama enerji miktarını bulmuş oluruz. Şimdi yakınsamamız gereken tek şey Mısırlı bir inşaat işçisinin günlük enerji tedariki; böylece işgücünün ortalama büyüklüğünü tahmin edebiliriz. Günlük toplam enerji miktarını, tipik adam-gün enerjisine bölmek yeterli.

Hesap bu haliyle birçok varsayımda bulunuyor. Hammaddelerin taşınması, taşların kesilmesi, gerekli makinelerin inşası –hatta işgücünün beslenmesi gibi enerji gerektiren diğer işlemleri de görmezden geliyor. Gerekli olan işçi sayısı üzerinde bir alt sınır oluşturuyor olsa da bir üst sınır sağladığı yok. Ve işgücünün ortalama büyüklüğünü bilsek bile, gerçek büyüklüğün ortalama etrafında nasıl oynadığını bilmemizin bir yolu yok. Yakınsamamızı iyileştirmek amacıyla, diğer bütün önemli enerji ihtiyaçları için yaklaşık değerler bulmalı, enerji kullanımının ne kadar verimli olduğu üzerine düşünmeli ve inşaatın muhtemel yapım modelini bulmaya çalışmalıyız. Piramitleri inşa edenler sabit büyüklükte bir işgücü mü kullandılar? Yoksa gerektiğinde daha fazla işçi kiralayıp, artık ihtiyaç duyulmadıklarında da kovdular mı? Kayıtlar bize bunları anlatmıyor ama Mısırlıların aklı başında, mantıklı insanlar gibi davrandıklarını farz ederek, bizden beklenebilecek olandan çok daha başarılı tahminlerde bulunabiliriz.

En sorunlu bilinmez, zaman. Khufu'nun piramidini inşa etmek ne kadar sürdü? Khufu 23 sene hüküm sürmüştü. Piramidi-

nin inşası, hükmünden çok önce başlamış olamaz ve ölümünden önce ya da kısa bir süre sonra da bitmiş olması gerekir. Diğer taraftan inşaattan sorumlu kişi Khufu'nun ne zaman öleceğini kesin olarak bilmiş olamaz. Yani, tahmini bir yakınsama yapmak gerekirse, bulunabilecek en basit varsayım Khufu'nun piramidinin 23 senede –kralın hükmüyle aynı uzunlukta– inşa edildiği olacaktır. Bu da çalışmaların yıl boyu sürdüğü varsayılırsa, toplamda 8400 gün yapar. Gerçek süre bunun iki katı da olabilir, yarısı da: zamanlamayla ilgili bu temel belirsizlik yüzünden, ilgili diğer değerleri hesaplarken ince detaylara girmek manasızdır.

Piramit inşasıyla ilgili bazı belli başlı teknikler antik kayıtlardan ve piramit alanının düzenlemesinden çıkartılabilir (Şekil 57). Piramitler, yakınlardaki taş ocaklarından çıkarılmış taş bloklardan yapılmışlardır ki taş ocaklarının konumu bazı durumlarda bilinmektedir. Yegane güç kaynağı, manivela kolu gibi ilkel ama etkili iş aletleri kullanan insan gücüydü (mesela su gücü kullanılmamıştır). Sonuçta piramitler, aşağıdan yukarıya doğru katmanlar halinde inşa edilmiştir –üstteki bloklar, alttakiler yerleştirilmeden konumlandırılmış olamazlar. Blokların yatay olarak taşınması işçiler tarafından, tahta kızaklar kullanılarak yapılmıştı (Mısırdaki duvar yontuları bunu gösteriyor). Hiç kimse taşların dikey olarak nasıl taşındığını bilmiyor: teoriler arasında kumdan devasa rampalar, manivelaların akıllıca yerleştirilmesi



Şekil 57 Khufu'nun piramidi ve etrafının şeması.

ve tahta desteklerden istifler var.

Khufu'nun piramidi, yapımı daha yeni bittiğinde 146,7 metre uzunluğundaydı ve 230.4 metrekarelik bir tabana sahipti. s kenar uzunluklu, kare tabanlı, h yüksekliğinde bir piramidin hacmi' $s^2h/3$'dür ki bu durumda hacmi $2{,}59\times10^6$ metreküp çıkar. İnşa malzemesi, yoğunluğu $d = 2{,}7\times10^3$ kilogram bölü metreküp olan kireç taşıdır, yani toplam kütle $7{,}01\times10^9$ kilogramdır. Bir piramidin potansiyel enerjisi (ilginç bir kalkülüs egzersizidir), g yerçekimine bağlı ivmeyi (9,81 metre/saniye) temsil edecek şekilde, $gds^2h^2/12$ 'dir. Bu da toplamda $2{,}52\times10^{12}$ jul eder. (Enerji birimi olarak jul kullanıyoruz.)

1917 tarihli *The Engineer's Manual*'a (Mühendislerin El Kitabı) göre bir işçinin bir günde sağladığı kullanılabilir iş miktarı ortalama $2{,}4\times10^5$ juldür. Yani gerekli olan işçi sayısı, mükemmel verimlilik farz edilirse, $2{,}52 \times 10^{12}/(8400 \times 2{,}4 \times 10^5)$ çıkar ki bu da 1253 işçi eder. Pratikte verimlilik mükemmel olmayacağından, bu yakınsamanın gerçeğin çok altında olduğu açık; ama gerekli olan işgücüne şöyle bir bakış açısı sağlıyor –beklediğiniz kadar çok değil.

Daha iyi bir yakınsama için lojistiğe daha çok kafa yormak lazım. Piramitler manasız taş yığınlarından ibaret değiller: içlerinde koridorlar ve odalar var ki bunların bazıları kendi başına takdire şayan mühendislik harikalarıdır. Yine de işin ezici çoğunluğu taşları istiflemekti, bu yüzden yapısal detayları görmezden gelebiliriz. Piramidin hacmini elimizde olan gün sayısına bölersek, ortalama bir günde yaklaşık 310 metreküp taşın yerleştirilmiş olması gerektiğini görürüz. Bir taş bloğun çıkarılması gereken yükseklik arttıkça, blok başına gerekli olan enerji miktarı da artacaktır; daha da ötesi piramit yükseldikçe, tepesindeki iş alanı da küçülecektir. Bu öngörüler gösteriyor ki günde 310 metreküp hızın sabit bir şekilde sürdürülebilmesi mantıklı değildir. Onun yerine, piramidin yüksekliği alçaktayken taş konumlandırma hızının daha fazla, yüksekteyken de daha az olması gerekir.

Wier, piramit inşası için üç adet temsili program değerlendirir:

(A) Sabit hız; belirli bir günde konumlandırılan her metreküp taş için, kullanılabilir alanın 10 metrekareden aşağıya

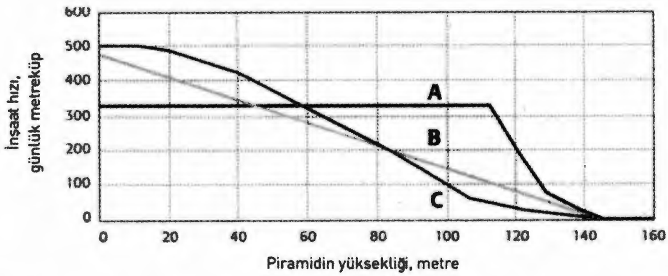
düşmemesi şartına dayalı.

(B) Piramidin o anki yüksekliğine bağlı olarak lineer azalan inşaat hızı.

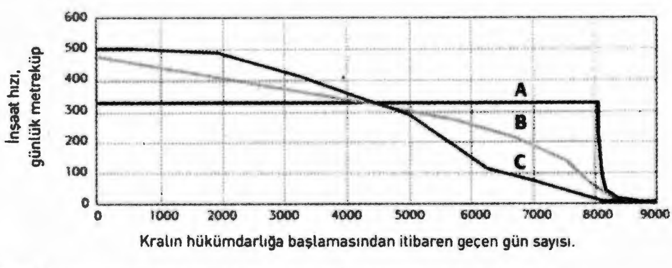
(C) Önce yavaşça düşen, sonra daha hızlı düşen ve en son dibe doğru çöken inşaat hızı.

Bu programlar Mısırlıların gerçekte yaptıkları inşaatlar üzerine bir model olarak önerilmemektedir: rehber olarak kullanılmak üzere yaratılmış, temsili ihtimallerdir.

Her programın tamamlanma süresini 8400 gün olarak kabul edersek, Şekil 58 inşaat hızının inşaatın yüksekliğine, Şekil 59 da zamana bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteriyor. Örneğin, (A) programına göre 8110'uncu güne kadar her gün 315 metreküp taşın konumlandırılması gerekiyor ki o noktadan sonra oluşan, piramidin tepesindeki sınırlı alan problemi yüzünden inşaat hızı seri bir şekilde düşüyor.



Şekil 58 Üç temsili programda inşaat hızının yüksekliğe göre değişimi.



Şekil 59 Üç temsili programda inşaat hızının zamana göre değişimi.

İnşaat hızına karar verdikten sonra gerekli olan iş gücü tahmin edilebilir. Örneğin (B) senaryosunu ele alalım. Bu durumda piramidin yüksekliği 0 metreyken inşaat günde 462 metreküple ilerler ve piramit her 10 metre yükseldiğinde yaklaşık 31 metreküp yavaşlar. İşimize yarayacak matematiksel bir numara da taşların hareketini iki bileşene ayırmaktır: dikey ("kaldırma") ve yatay ("taşıma"). Bu iki bileşenin ayrı ayrı *gerçekleştiğini* farz ediyor değiliz –örneğin, taşlar eğimli bir rampa üzerinde çekiliyorlarsa bileşkelerin ikisi beraber değişir.

Dikey kısımda yapılan iş, taşların piramidin tepesine kaldırılmasından ibaret değildir –taşların taş ocağından piramidin taban seviyesine kaldırılmasını da içerir ki bu yüksekliğin 10 metre olduğu biliniyor. Taşların kaldırılması için gerekli olan adam sayısı, ihtiyaç duyulan potansiyel enerji miktarına kas gücünün verimli kullanılmamasından kaynaklanabilecek hata payı eklenerek hesaplanabilir. Yatay kısım, taşların taş ocağından piramide kadar –az çok 635 metre– kaydırılması ve piramit üzerinde yerleştirilebilmeleri için gerekli olan bütün manevraların eklenmesiyle hesaplanır. Taşınma işlemince gerekli olan işçi sayısını bulabilmek için, kum yüzeyle tahta kaydırak arasındaki sürtünme katsayısı tahmin edilir ve sürtünmeye karşı yapılan iş hesaplanır ki bu bize harcanmış olan enerjiyi verecektir.

İşgücü, taşların ocaktan kazılması, şekle gelinceye kadar yontulmaları, tahta kaydıraklar yapılması ve bunun gibi başka şeyler için de gereklidir. Wier böyle ince işlerin toplamının, günde bir metreküp taş için 5-10 adam gerektireceğini farz eder. (B) senaryosu için geçerli olan sonuçlar, üst sınır olan 10 adam kullanılmış haliyle Şekil 60'da bulunabilir. İşgücü hiçbir aşamada –o günlerdeki Mısır'ın toplam işgücünün %1'inin biraz altı olan– 12.800 adamı geçmez. (A) ve (B) senaryolarından da çok benzer sonuçlar çıkar, buradan da mantıklı bir inşaat programının yaklaşık olarak bu büyüklükte bir işgücünü gerektireceği kanısına varırız.

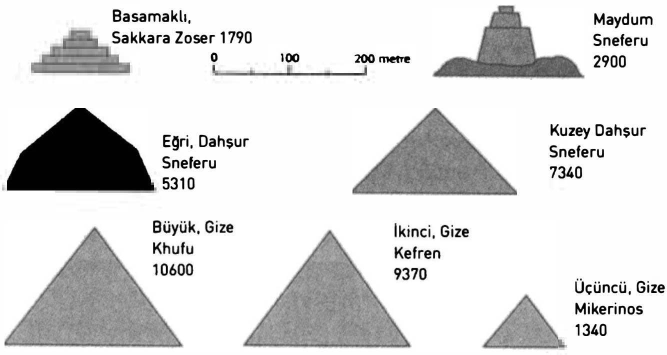
Uygulanabilecek belki de en basit program, sabit büyüklükte bir işgücü kullanmaktan geçer, tabii sonlara doğru piramidin

tepesinde birkaç işçiden fazlası için yeterince çalışma alanı kalmayacağından, o durum hariç. Hesaplar sonucu ortaya çıkar ki aynı varsayımlar altında, 8300 kişi Khufu'nun piramidini inşa etmek için yeterli olacaktır. Diğer piramitler için de benzer sonuçlar bulunabilir (Şekil 61). Piramitlerin afallatıcı boyutlarına rağmen, işgücü bir sorun oluşturmuş gibi durmuyor.

Şekil 60

(B) senaryosu için gerekli olan işgücü yakınsamaları.

YÜKSEKLİK	KALDIRMAK	TAŞIMAK	DİĞER	TOPLAM
145	15	5	21	41
140	215	85	321	621
130	860	370	1360	2590
120	1290	590	2120	4000
110	1640	810	2850	5300
100	1930	1030	3540	6500
90	2150	1250	4190	7590
80	2290	1470	4830	8590
70	2370	1690	5400	9460
60	2380	1910	6010	10300
50	2320	2130	6450	10900
40	2190	2350	6960	11500
30	1990	2570	7440	12000
20	1716	2794	7890	12400
10	1380	3010	8210	12600
0	970	3230	8600	12800



Şekil 61: Günümüzde oluşan çeşitli piramitler için gerekli olan iş gücü.

Mısırlılar bu kadar çok taşı nasıl kaldırıp yerleştirdiler? Sıklıkla karşılaşılan teorilerden birine göre kumdan yapılma muazzam rampalar kullanmışlar ve sonra da bu rampaları kaldırmışlardır. İnşaat süresince çeşitli amaçlarla küçük rampalardan yararlandıkları kesin ama piramidin tepesine kadar uzanan devasa rampalar yapmış olmaları pek muhtemel durmuyor. Rampalarla ilgili bir diğer problem ise işçilerin sadece taşları değil, kendi *kendilerini* de yukarıya taşımak zorunda kalmaları. Tabii, ip kullanarak çekmedilerse ki rampanın büyük olduğu düşünülürse bu pek kolay olmazdı.

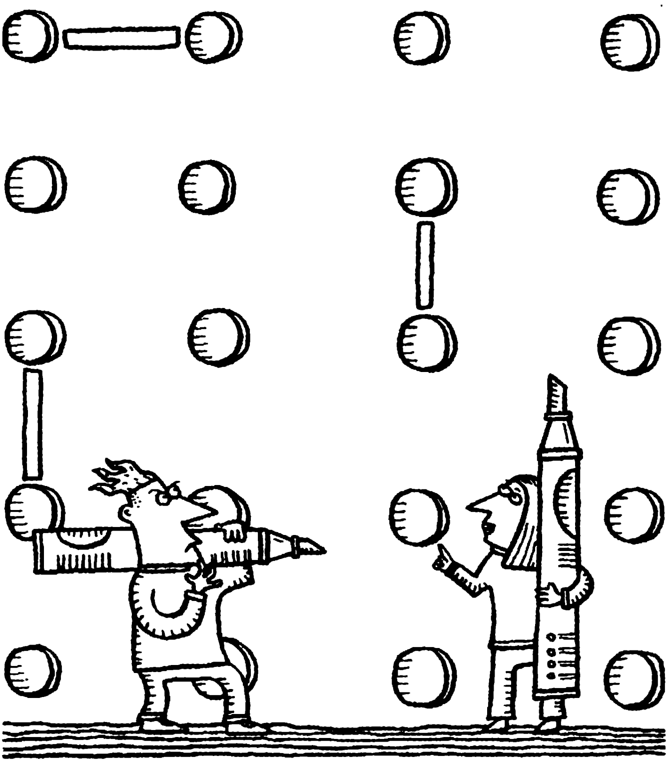
İşçilerin hareketini mümkün olduğunca az tutmak daha iyi bir hamle olurdu. Bunu başarmanın basit ve etkili yollarından birini bundan birkaç sene önce, antik teknolojilere bağlı bulmacalarla uzun zamandır uğraşan İngiliz Alan Moore'dan duydum. Bulduğu fikir, piramidin yüzü üzerince yerleştirilecek olan bir grup kaldıracı kullanmaktan ibaret. İpten "çantalar" içine yerleştirilmiş taşlar bir kaldıraçtan diğerine hızlıca geçirilebilir ve piramit adım adım tırmanılmış olur. Kaldıraçları kullanan işçiler, vardiya değişimleri hariç sabit duracaklardır. Bir kaldıraç bir taşı kaldırır kaldırmaz sıradaki taşı kaldırmaya hazırdır. Kaldıraçların kurulumu için gerekli olan gayret dışında ki işin diğer kısmıyla karşılaştırıldığında devede kulak kalır, bu yöntemde çok

az enerji heba olmaktadır ve –büyük bir artı olarak– çok az iş alanına gereksinim duyar.

Mısırlıların tam olarak ne yaptığını hiçbir zaman öğrenemeyebiliriz ama kullanışlı yöntemler arayıp bunların ne kadar gayret gerektireceğini incelemek öğreticidir. Ayrıca sonuçlardan bazıları, Wier'in de fark ettiği üzere basit ve evrensel matematiksel ilkeler sayesinde, kullanılan yöntemden büyük oranda bağımsızdır.

16

Nokta-ve-Kutular Oyununda Büyük Usta Olmak



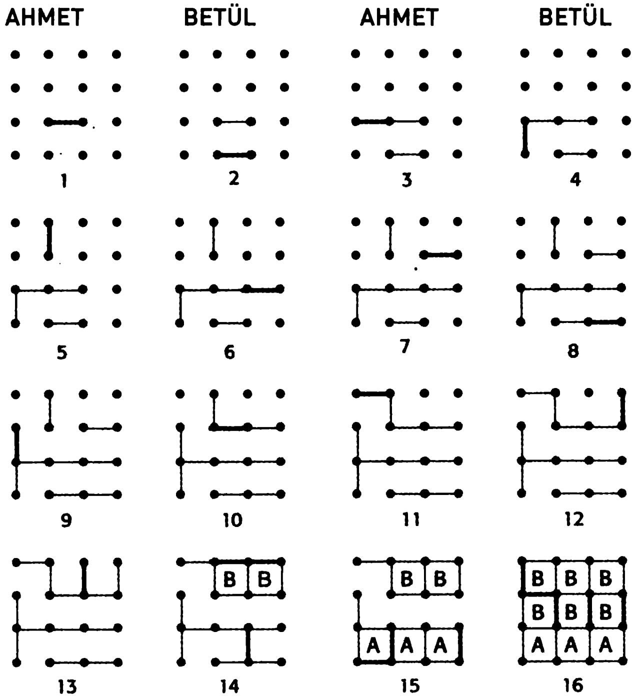
Hepimiz çocukluğumuzda bu oyunu oynamışızdır. Noktalardan oluşan dikdörtgen bir ızgara hazırlayın ve sıra size geldiğinde iki komşu noktayı birleştirin. Eğer bir kare oluşturabilirseniz içine baş harfinizi yazın: o kutu artık sizindir. Ve bütün kutular çizilinceye kadar tekrar tekrar oynamak zorundasınız. En çok kutuya sahip olan kişi kazanır. Basit mi? Kurallar basit ama stratejik olasılıklar basit değil. Noktalar-ve-Kutular (ya da basitçe Kutular) keşfedilmiş en şeytanca ve karmaşık oyunlardan biridir. Uzmanlığın ilk aşamalarına gelebilen -ya da bu aşamaların farkında olan- çok az kişi vardır.

En basit oyunların altında yatan ince matematiksel yapılardan etkilenmeyi hiç bırakmadım. Çocuk oyunlarında bile, ancak ileri seviye matematikle çözülebilecek sorular çıkabilir. Elwyn Berlekamp'ın *The Dots and Boxes Game* (Nokta ve Kutular Oyunu) isimli kitabı (Ek kaynaklar) bu düşünce şeklini yeni zirvelere taşıyor. Hemen hemen herkes bu oyunu ilkokulda oynamış olsa da kitabı okuduktan sonra, milyonda bir kişinin bile mümkün olan en ileri seviye ustalığa yakınlaşabildiğini düşünmüyorum. Oyun stratejisindeki ilk seviye inceliklerden bile haberdar olan çok az oyuncu var. Berlekamp açıkça göstermiş ki bunlardan daha derin birçok seviye mevcut –keşfedilmemiş derinlikler de cabası.

Öncelikle kuralları hatırlayalım. Oyun, noktalardan oluşan dikdörtgen bir ızgaranın üzerinde başlar. Oyuncular, sıra onlara geldiğinde, birbirine dikey ya da yatay olarak komşu olan (ama çapraz komşu olmayan) iki noktayı seçip aralarına düz bir çizgi çekiyor. Eğer bir oyuncu bir kutunun –birim kenarlı kare– dördüncü köşesini tamamlarsa o kutunun içine isminin baş harfini yazar ve oynamaya devam eder (ve kutu tamamlamaya devam ettiği sürece oynamaya da devam etmek *zorundadır*). Oyunun sonunda en çok sayıda kutu tamamlayan kişi kazanır.

Oyuncuları Ahmet ve Betül olarak isimlendirip, ilk hamleyi her zaman Ahmet'in yapacağı var sayımı altında çalışalım. Şekil

62, çocuklar (ve çoğu yetişkin) tarafından uygulanan tipik stratejiyi gösteriyor: Ben buna, 0 Seviyesi oyun diyeceğim. Oyuncular, muhtemel bir kutunun üçüncü kenarını çizmeyen hamleler arayarak, karşı tarafa kutu vermekten ellerinden geldiği sürece kaçınacaklardır. Sonunda oyun tahtası bir seri "zincir"e bölünecektir. Bunlar, bir oyuncu zincirin başlangıcında bir kare tamamlar tamamlamaz zincirin sonuna kadar kare tamamlamaya devam edebileceği, çizgilerle sınırlandırılmış yılanımsı bölgelerdir. Zincirler, çember gibi kapanabilirler.



Şekil 62 0 seviyesinde tipik bir oyun.

Izgara, bir noktadan sonra tamamen zincirlere ayrılmış olacak –ki ben bu duruma *darboğaz* diyeceğim. Böyle bir durum, yukarıdaki oyunda Betül tarafından 12'inci hamlede oluşturuluyor. Bir kez darboğaza gelindiğinde oyuncular genellikle en kısa zinciri seçer ve böylece karşı tarafa en düşük sayıda kutu

vermiş olurlar. Karşı taraftaki oyuncu bu zinciri tamamladıktan sonra sıradaki en küçük zinciri vermek zorunda kalacak ve oyun böylece sürüp gidecektir.

Göstermiş olduğumuz oyunda darboğaza girmiş üç zincir vardır: sırayla 2, 3 ve 4 muhtemel kutu içerirler. 0 seviyesindeki oyunda Ahmet, 2 uzunluğundaki zinciri Betül'e vermek zorunda kalır. Sıra Betül'e geldiğindeyse 3 karelik zinciri Ahmet'e verir ve sıra yeniden Ahmet'e geldiğinde de 4 uzunluğundaki zinciri Betül'e vermek zorunda kalır. Betül, Ahmet'in 3 kutusuna karşılık 6 kutuyla oyunu kazanır.

1 seviyesindeki oyun, 0 seviyesindeki oyun üzerinden şu mantıkla geliştirilmiştir: Oyun bir kez darboğaza ulaşıldıktan sonra kimin kazanacağının hesabını tutarak, kazananın karşı taraf olmamasını sağlamak. 0 seviyesindeki oyunda oyunu kazanan kişi, darboğaz sırasındaki zincir sayısının paritesine (tek ya da çift) *ve* darboğazdan hemen sonra ilk zincirde bir çizgi çekerek o zinciri karşı tarafa veren oyuncunun kim olduğuna göre değişir. Bu duruma zinciri "açmak" diyelim: bir zinciri, o zinciri karşı tarafa sunarak açmış olacağınıza dikkat edin –o zinciri kendiniz almıyorsunuz.

Eğer darboğaz sırasındaki zincir sayısı çiftse, ilk zinciri açacak olan oyuncu oyunu kazanır çünkü rakiplerinin açacağı her zincir bir önceki turda kendisinin açtığına eşittir ya da daha büyüktür. Bu durumda ilk zinciri açan oyuncunun, oyunun son hamlesine de sahip olduğuna dikkat edin. Diğer taraftan tek sayıda zincir varsa ilk zinciri açan oyuncu oyunu kaybedecektir –çünkü ilk zinciri rakibi alacak ve oyuncunun bundan sonra alacağı her zincir, rakibin bir sonraki turda alacağı zincire eşit ya da daha ufak. Bu durumda oyundaki son hamleyi karşı taraf yapar.

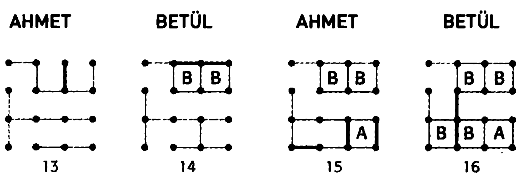
Bizim örneğimizdeki darboğaz sırasında üç (tek sayıda) zincir var ve darboğaza ulaşıncaya kadar 12 (çift sayıda) hamle yapılıyor. Ahmet zincirlerden birini açmak zorunda kalıyor ve haliyle de Betül birinci ve üçüncü zincirleri alıyor; Ahmet de sadece ikinci zincirle yetinmek zorunda kalıyor.

Darboğazı kimin kıracağı, darboğaza ulaşıncaya kadar yapı-

lan hamle sayısının paritesine bağlı. Eğer sayı çiftse Ahmet ilk zinciri açar ve Betül de ilk işgali gerçekleştirir; yok sayı tekse Betül ilk zinciri açar ve Ahmet de ilk işgali gerçekleştirir. Ahmet, Betül'ün 0 seviyesinde oynadığı bir oyunu kazanmak istiyorsa, darboğaza ulaşıncaya kadar yapılan hamle sayısı *artı* zincir sayısının çift olmasını sağlamak durumunda. Eğer bunu başarabilirse, ya çift sayıda zincir vardır ve ilkini Ahmet açar ya da tek sayıda zincir vardır ve ilkini Betül açar. İki durumda da Ahmet kazanır.

Ne var ki Betül de 1 seviyesinde oynayabilir. Eğer Ahmet 1 seviyesinde oynuyorsa, darboğaza ulaşıncaya kadar yapılan hamle sayısı *artı* sonuçta ortaya çıkan zincir sayısının tek olmasını sağlamak durumunda. Seçeneklerin dikkatlice gözden geçirilmesi, darboğazdan birkaç hamle önce, bu hedefine ulaşmasında yardımcı olabilir ama her zaman garanti etmez.

Bu kadar düşük oyun seviyelerinde bile, oyunla alakalı çeşitli sayıların pariteleriyle ilgili basit matematiksel ilkeler görüyoruz. Eğer 1 seviyesindeki oyun kaybetmemize sebep olacaksa, öyle oynamayı reddedip, bu ilkelerin kafasına 2 seviyesindeki oyunu kullanarak vurabiliriz. Bu örnekte Ahmet, 12 hamleden sonra iki oyuncunun da 1 seviyesinde oynamaya devam etmesi halinde oyunu kaybedeceğini biliyor. Bu yüzden de Betül'ü dezavantajlı duruma yerleştirecek kurnazca bir plan buluyor. 13'üncü hamlede yine Betül'e iki kutuyu da sunarak, 2 uzunluğundaki zinciri açıyor. Betül 14'üncü hamlede 3 uzunluğundaki zinciri Ahmet'in alması için açıyor. Ama Ahmet 15'inci adımda o zincirdeki 3 kutuyu birden almayı reddediyor. Bunu yerine içlerinden sadece birini alıyor ve sonra da 2×1'lik bir dikdörtgen (ki ben buna *domino diyeceğim*) bırakacak şekilde bir çizgi çekiyor (Şekil 63).



Şekil 63 2 seviyesindeki ilerleme.

Bu strateji, *ikiyüzlü* hamle olarak bilinir. Sonuçta bir "kurban" etme olayıdır –Betül'e basit bir istila şansı tanır– ama onu aynı zamanda, kurbanı kabul edip etmemesinden bağımsız olarak, sonu pek hayırlı olmayan bir konuma yerleştirir. Eğer dominonun içindeki çizgiyi çekerse iki kutu kazanır *ama* tekrar oynamak zorundadır ki bu 4 uzunluğunda bir zinciri açar ve Ahmet de hepsini kapar, oyun da 5-4 Ahmet'in lehine sonuçlanmış olur. Ne var ki bunun yerine 4 uzunluğundaki zinciri açarsa durum daha da kötüdür: Ahmet bütün zinciri alır üstüne dominodaki kareleri de alarak oyunu 7-2 kazanır.

Biraz önceki durumda, Ahmet ikiyüzlü hamlesini yaptığı anda Betül'ün sonu gelmişti çünkü geriye sadece bir zincir, artı domino kalmıştı. Yine de biz şimdi, birkaç zincir kaldığını farz edelim. Betül de ikiyüzlü hamleler yaparak birkaç kareyi kendi pençelerine alabilir mi?

Her zaman değil. Belirli bir sayıda domino ve 3 ya da daha uzun zincirlerin bulunduğu (ki böyle zincirlere "uzun zincir" diyeceğiz) bir konuma geldiğimizi farz edelim. Sıra Betül'de olsun. Bu konuma düşmüşken, müsait bütün dominoları alsa da olur –yok almazsa Ahmet sıradaki hamle serisinin ortasında, kendini daha kötü bir konuma koymadan dominoları alabilir. Betül de burada, üzerinde biraz oynanmış 1 seviyesinde strateji uygular: kalan zincirler arasından en kısa olanını aç. Sonrada Ahmet sıradaki en kısa zinciri açmak zorunda kalacak... haliyle de her şey aynı önceden olduğu gibi uzun zincir sayısın paritesine bağlı. Değil mi?

Değil. Eğer kalan zincir sayısı tekse Ahmet 1 seviyesinde oynamaktan tabii ki de mutluluk duyacaktır. Ama eğer çiftse, bütün zinciri de kabul etmek zorunda değil. Onun yerine 3 seviyesinde oynamayı tercih ederek *iki tanesi hariç* bütün kutuları alıp, ikiyüzlü bir hamleyle bitirebilir. Şimdi Betül biraz öncekiyle aynı problemle yüz yüze ama uzun zincirlerden biri eksik (bu da parite değişikliğini getiriyor). Aslında, Ahmet zincir başına iki kutuyu nazikçe Betül'e verip geriye kalanı da kendisi alabilir ve böylece de Betül'ü daha uzun zincirleri açmaya zorlayabilir.

Eğer bahsi geçen uzun zincirler 5 ya da daha fazla kutu ihtiva ediyorsa Ahmet her seferinde kazançlı çıkar. Ancak 3 kutu içeriyorlarsa bu strateji Betül'e, Ahmet'e düşenden bir fazla kutu sağlar. Eğer birçok uzun zincir varsa ve bunlar arasından yeterli sayıda zincir 5 ya da daha fazla uzunluğa sahip olup, uzunluğu 3 olan zincirler yüzünden yaşanan kayıpları telafi edebiliyorsa, Ahmet oyunu kazanır.

Eğer bir oyuncu, rakibini uzun zincirlerden birini açmak zorunda bırakabiliyorsa, oyunun *yönetimi elinde* denir. Şu halde, buraya kadar anladıklarımız şöyle özetlenebilir. Oyunu oynamanın iyi bir yolu, (belki en iyi yolu değil ama çoğu oyuncuya karşı etkili bir yol) yönetimi eline almak ve sonra da her uzun zincirin sonundaki iki kutuyu almayarak yönetimi elinde tutmaktır. Tabii ki oraya kadar gelmişken son iki kutuyu da rahatlıkla alabileceğiniz son zincir hariç.

Kısaca, oyunun amacı kutuları almaktan ziyade: yönetimi elinde tutmaktır. Şimdi 4 seviyesi stratejilere geçmeye hazırız. Yönetim, nasıl ele geçirilir? Buradaki anahtarın bir kez daha parite olduğu ortaya çıkıyor ama önce gerekli olan başka bir kavram var. Bir oyuncunun, ortadaki çizgiyi çekip dominoyu işgal eden bir hamle ile iki kutuyu alması olayına, çifte kazık diyeceğiz. Şu halde yönetimi ele geçirmek için etkili olan bir strateji:

- Ahmet başlangıçtaki nokta sayısı artı çifte kazık sayısını *tek* tutmaya çalışır.
- Betül başlangıçtaki nokta sayısı artı çifte kazık sayısını çift tutmaya çalışır.

Bu kuralı şu durumun farkında olarak daha basit bir şekilde ifade edebiliriz: nokta sayısı artı çifte kazık sayısı oyundaki toplam hamle sayısına eşittir. Az miktar akıl yürütmeyle ulaşılır ki:

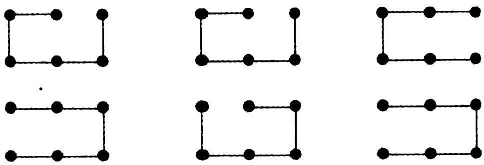
- Ahmet, başlangıçtaki nokta sayısı artı uzun zincir sayısını çift tutmaya çalışır.
- Betül, başlangıçtaki nokta sayısı artı uzun zincir sayısını *tek* tutmaya çalışır.

Bu işin gereğinden fazla derinleştiğini düşünüyor olabilirsiniz ama biz buraya kadar, Berlekamp'ın 86 sayfalık kitabındaki

sayfa 7'ye anca geldik. Daha ileri başlıklar arasında, Nimstring isminde, yakından alakalı bir başka oyun ve birçok oyunla da alakalı olmasına rağmen hakkıyla anlatabilmek için bir, belki de on makale daha gerektirecek nim-ekleme kavramı da var. Bu teknikleri kuşanırsanız, son durumun çok yakın olduğu oyunlarda daha sik kazanmaya başlarsınız.

Yine de bir kavramdan daha bahsedeceğim: *kaçık hamlesi*. Bu aşağıdakilerden herhangi birisidir:

- 2 uzunluğundaki bir zinciri, rakibiniz bir domino oluşturabilecek şekilde bitirmek (*isteksiz teslim* olarak bilinir). Bakınız, Şekil 64.
- Uzun bir zinciri açmak.



Şekil 64 İsteksiz teslimler.

- 4 uzunluğunda ya da daha uzun bir çemberi açmak.

Rakibinizin bir kaçık hamlesi yapması durumunda kalan kutuların en azından yarısını alabileceğiniz ispatlanabilir. Ne var ki bu ispat yapıcı değildir –yani bu sonuca ulaşmak için nasıl oynamanız gerektiğini anlatmaz. Ana fikir şu ki her hamlede iki seçeneğiniz var ve bu seçeneklerden birisi rakibinizin işine yarıyorsa, diğeri de sizin işinize yarayacaktır. Nimstring burada hangi hamlelerin iyi olduğuna biraz ışık tutuyor.

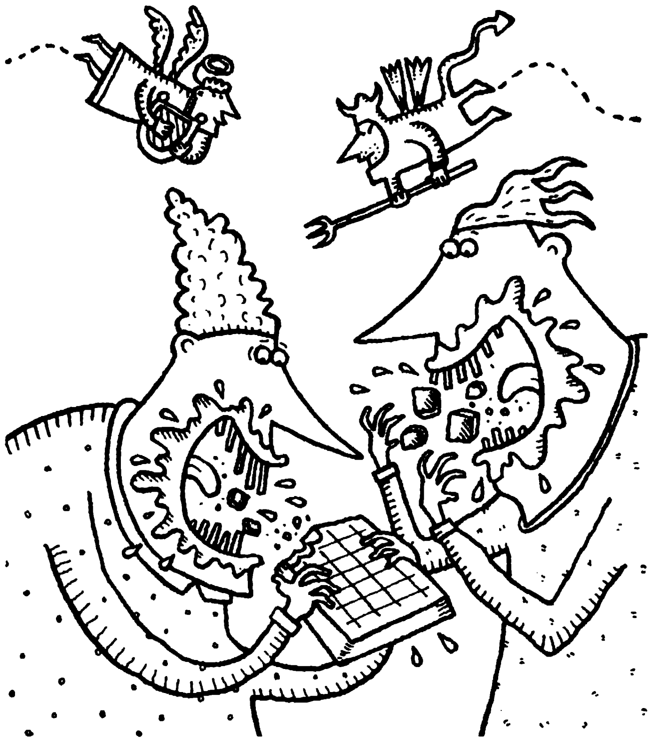
Uzmanlar arasında oynanan çoğu oyun, eninde sonunda bütün hamlelerin kaçık olduğu bir duruma ulaşır. Buna *Kaçık Son* denir ve matematiksel olarak çok karmaşıktır: Berlekamp bu durumu derinlemesine incelemiştir. Kaçık sondaki bir oyunu kazanmak daha çok yönetimi ele geçirmekle ilgilidir –yani bir kez daha yönetimin önemine geri döndük.

Yadigarımız Noktalar-ve-Kutular, demek ki, çoğumuzun ha-

yal ettiğinden daha sofistike bir oyunmuş –hatta o kadar sofistike ki bilinen hiçbir kazanma stratejisi yok. Berklam bu oyunu "açık arayla, dünyadaki matematiksel olarak en zengin çocuk oyunu" olarak anlatır. Basit görünümlü oyunların matematiksel derinliğini Hiçbir zaman hafife almayın.

17

Çekimser Çikolata Çokurdatmaları



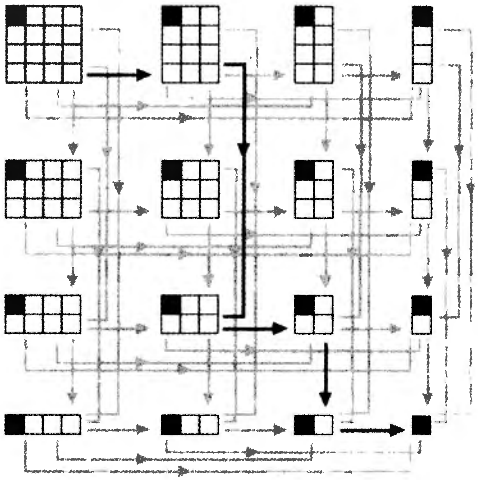
Pis Çoki ve Çomp[1], kuralları birbirine çok benzeyen çokokolik oyunlardır ama benzerlik orada biter. İlki, kolay bir yenme stratejisi olan "rüya" oyundur. İkincisiyse -birinci oyuncunun, sürekli doğru hamleler yapması durumunda kazanması gerektiğini bildiğimiz ama o hamlelerin ne olduğunu bulamadığımız- bir "kabus" oyun. Bu oyunlar, birbirleri arasındaki karşılaştırmalarla, kazanma stratejileri ve bu stratejilerin nasıl bulanacağı hakkında birçok şey öğretiyor.

1- Esas isimleri, Yucky Choccy ve Chomp.

Bir oyunun kuralları basit diye, o oyunu kazanmak için basit bir strateji var olmak zorunda değil. Bazen vardır; s-o-s buna iyi bir örnektir. Ama bazen de yoktur; çocukluğumuzun bir başka oyunu, noktalardan oluşan dikdörtgen bir ızgaranın üzerinde oynanıp tamamladığımız kareye el koyduğumuz Kutular, bu duruma iyi bir örnektir (16. Bölüme bakın). Bariz sebeplerden ötürü birinci tür oyunlara "rüya oyun", ikinci tür oyunlara da "kabus oyun" diyorum. Çok benzer kurallara sahip oyunlar, rüya-kabus durumları açısından şaşırtıcı derecede farklı olabilirler. Ve tabii ki de en ilginç olan oyunlar genelde kabus oyunlardır çünkü önceden kimin kazanacağını bilmeden –hatta bazı durumlarda kimin kazanması gerektiğini bilmenize rağmen nasıl kazanacaklarını bilmeden– oynayabilirsiniz.

Bu şaşırtıcı gerçekleri sergilemek amacıyla, çikolata barları üzerine kurulmuş iki oyundan bahsedeceğim. İlki olan "Pis Çoki" bir rüya oyundur. Diğeri "Çomp", çok benzer kurallara sahip olsa da gerilim dolu bir katkıyla, ilk oyuncunun doğru hamleler yapması durumunda her zaman kazanacağının bilindiği ama doğru hamlelerin nasıl yapılması gerektiğini kimsenin bilmediği bir kabus oyunudur. Pis çokiyi kim icat etti, hiçbir fikrim yok: bana, Sheffield Üniversitesinden Britanyalı matematikçi Keith Austin tarafından anlatılmıştır. Oyun idealize bir çikolata barı, karelere ayrılmış bir dikdörtgen üzerinde oynanır. Oyuncu-

lar ki ben onlara oyundaki sıralarını göz önüne alarak "Pir" ve "Ki" diyeceğim, sırayla çikolatadan bir öbek kırarlar ve bu öbeği yemek zorundadırlar. Bu olaya, oyundaki bir *hamle* diyelim. Kırma işlemi, çikolatanın bir kenarından diğerine kadar devam etmelidir ve kareler arasından ilerleyen düz bir çizgi şeklinde olmak zorundadır. Dört köşedeki çikolata karelerinden biri sabun parçası içermektedir ve bu kareyi yemek zorunda kalan oyuncu oyunu kaybeder. Şekil 65'deki koyu oklar 4×4 büyüklüğünde çikolatanın üzerinde oynanan bir oyunu ve silik oklar da muhtemel bütün hamleleri gösterir. Bu diyagram, 4×4'lük pis çoki oyununun bütün *oyun şemasını* vermektedir. Bizim de kısa süre içerisinde göreceğimiz üzere Ki büyük bir hata yapmış ve oyunu kazanabilecekken kaybetmiştir.



Şekil 65 4x4'lük pis çoki oyun şeması. Oklar, geçerli hamleleri temsil eder: koparılan parça yenmek zorundadır. Siyah gösterilen kare sabunlu olandır. Koyu oklar oynanmış bir oyunu temsil ederken, gölgeli oklar yapılabilecek diğer bütün hamleleri gösterir.

Rakibin yaptığı hamlelerden bağımsız olarak kazanmayı garantileyen bir hamle dizisine *kazanma stratejisi* denir. Strateji kavramı sadece bir oyunu değil, muhtemel bütün oyunları kapsar. Satranç oynarken yaptığınız birçok planlama, "eğer" soruları üzerine kurulur. "Eğer piyonumu ilerletirsem, kraliçesiyle ne yapabilir?" Taktik ve stratejiler şu anda yapılan hamlelerden öteye, rakibinizin ya da sizin gelecekte yapma *ihtimaliniz* olan hamleler üzerinden de ilerler.

"Sonlu" oyunlar, yani sonsuza kadar devam edemeyen ve bir noktada bitmek zorunda olan oyunlar, üzerine muazzam bir kuram geliştirilmiştir. Temelde iki adet basit ilkeye dayanır:

(1) Bir konumda, rakibinizin kaybetmesiyle sonuçlanacak *herhangi* bir hamle yapabiliyorsanız o konuma kazanan konum denir.

(2) Bir konumda, yapabileceğiniz *bütün* hamleler rakibinizi kazanır konuma getiriyorsa o konuma kaybeden konum denir.

Burada bahsi geçen mantık, kendi kuyruğunu kovalıyormuş gibi durabilir ama gerçekte öyle değildir: tekrarlayıcıdır. Aradaki fark, tekrarlayıcı mantıkta bir başlangıç noktasının bulunmasıdır. Bunu göstermek için yukarıda bahsettiğimiz iki ilkeyi kullanarak 4×4'lük pis çoki için bir kazanma stratejisi bulacağım. Buradaki numara, sondan başlayarak geriye doğru ilerleyip, "oyun şemasını budamak" denen süreci kullanmaktır.

Yegane sabunlu parça olan ■, kaybeden bir konumdur. Bu gerçeği, girdileri çikolata barını değil de Şekil 65'deki çeşitli konumları ifade eden aşağıdaki diyagram ile sembolize edeceğim:

Burada "L" "kaybeden konum", * "daha bilinmiyor" ve "W"

```
L * * *
* * * *
* * * *
* * * *
```

"kazanan konum" olarak kabul edilmiştir; tabii o kazanan konumları bulmamız lazım. Aslında, ■□ ■□□ ■□□□ konumlarının hepsi kazanan konumdur çünkü bir hamleyle bütün beyaz kareleri kırabilir ve rakibinizi tek karelik kaybetme konumunda bırakabilirsiniz. Biraz önce söylediklerimize denk olarak, oyun şemasındaki yukarıda bahsi geçen konumlardan direkt olarak ■ konumuna giden oklar vardır ve (1) numaralı ilke yüzünden bütün bu konumlar kazanan konumlardır. Benzer sebeplerden ötürü yukarıdaki konumların doksan derece döndürülme-

siyle elde edilen konumlar da kazanan konumlardır, yani bir adımla sabunlu kareye ulaşılabilen bütün konumları oyun şemamızdan budadık ki bu da bize o konumların oynadığı rolü gösteriyor:

L W W W
W * * *
W * * *
W * * *

Peki ya  konumu? Şöyle ki yapabileceğiniz yegane hamleler

 ya da  hamlesidir ki yekpare beyaz parçayı çıkardığınızda, rakibiniz için kazanan bir konum bırakmış olursunuz.

(2) numaralı ilke  konumunun kaybeden olduğunu söylüyor, o zaman biz de bir dal daha budayarak şunu elde edebiliriz:

Yani ,  ve bunun gibi konumlar ( kalacak şekilde bir parça kopararak) kazanan konumlardır, buradan da şu çıkar:

Bu usulle devam ederek bütün pozisyonların kaybeden/ka-

L W W W
W L * *
W * * *
W * * *

zanan durumlarını çözebilirsiniz. Buradaki mantık amaçsızca dönüp durmuyor, oyun şemasını yukarıdan aşağıya doğru, yaprakdan dala, daldan gövdeye birbirine geçmeli spiraller şeklinde buduyor. Ama oyunun *sonundan* başlamak zorundayız ki bu da bir dert. Bizim yapmak istediğimiz şeyse bütün oyun şeması ağacını, George Washington misali, tek bir hamleyle devirmek;

L W W W
W L W W
W W * *
W W * *

başlangıç konumunun kazanan-kaybeden durumunu anlamak ve eğer kazanan bir konumsa, oynanması gereken hamleleri bulmak. Şema ağaçları ufak olan oyunlar için herhangi bir zorluk yok: tekrarlanan budamalarla sonuca ulaşmak mümkün. Şekil 65'de bu söylediğimizi yapıp, şunu elde edebiliriz:
Yani 4×4 konumu, örneğin, kaybeden bir konumdur.

Bu yaptıklarımızı, kare ya da dikdörtgen, daha büyük çikolata barlarıyla denerseniz aynı desenin ortaya çıktığını çabucak görürünüz: kaybedenler köşegen üzerinde olur ve diğer bütün barlar da kazananlardır. Şimdi, köşegen üzerindeki o barlar kare olanlardır: 1×1, 2×2, 3×4, 4×4. Buradan herhangi bir boyuttaki çikolata barına uygulanabilecek basit bir strateji çıkar: kareler kaybe-

L W W W
W L W W
W W L W
W W W L

der, dikdörtgenler kazanır. Bu apaçık desenin farkına vardıktan sonra doğruluğunu, bütün oyun şemasını (1) ve (2) numaralı prensipler üzerinden çözümlemeden de kontrol edebiliriz. Şöyle akıl yürüteceğiz. Açıkça görülüyor ki herhangi bir dikdörtgen (kazanan) bir hamle ile kareye (kaybeden) döndürülebilir. Buna rağmen, bir kareyle (kaybeden) başlayarak yapacağınız her hamlede, rakibinize bir dikdörtgen (kazanan) bırakmaktan kendinizi alıkoyamayacaksınız. Dahası, kaybeden olduğunu bildiğimiz ■ konumu da bir kare. Bunların hepsi (1) ve (2) numaralı ilkelerle uyumlu, biz de geriye doğru çalışarak gösterebiliriz ki (tekrarlamayla) *her* kare kaybedendir ve *her* dikdörtgen kazanandır. Şimdi görebiliyoruz ki Ki'nin Şekil 65 deki ilk hamlesi bir hataydı. Ve pis çoki, çikolata barının büyüklüğünden bağımsız olarak bir rüya oyunudur.

Bu prosedür, prensipte bütün sonlu oyunlara uygulanabilir. Açılış konumu oyun şemasının "kökü"dür. Diğer uçta en yukarı dalların filizleri vardır ki bunlar da oyunu, oyunculardan birinin

kazandığı konumları ifade etmektedirler. Bu sınır konumlardaki kazanma/kaybetme durumunu bildiğimiz için, dallar arasında geriye doğru ilerlerken (1) ve (2) numaralı ilkeleri kullanarak, konumları "kaybeden" ya da "kazanan" olarak etiketleyebiliriz. İlk turda, oyunun sonundan bir hamle geride olan konumların durumunu belirleriz. İkinci turda, oyunun sonundan iki hamle geride olan konumların durumunu belirleriz ve bu böylece gider. Oyun şemasının sonlu olduğunu farz ettiğimizden, eninde sonunda şema ağacının köküne –başlangıç konumuna– varmamız gerekir. Eğer bu konum "kazanan" etiketini alırsa Pir'in bir kazanma stratejisi vardır; alamazsa da Ki alır.

Yine prensipte, kazanan stratejinin ne olduğunu söyleyebilmemiz gerekir. Eğer açılış konumu "kazanan" ise Pir her zaman etiketi "kaybeden" olan bir konuma geçmelidir ki bu konumla Ki yüzleşin. Bu konum da kaybeden olduğundan, Ki'nin yapacağı her hamle Pir'e "kazanan" bir konum sunacaktır. Benzer şekilde açılış konumu "kaybeden" ise aynı formül altında Ki'nin kazanan stratejisi vardır. Yani prensipte, sonlu olan ve berabere bitme olasılığı olmayan oyunlarda oyun şeması üzerinde geriye doğru çalışarak, açılış konumu da dahil, bütün konumların durumu belirlenebilir. "prensipte" diyorum çünkü oyun şeması çok büyükse hesaplamalar, altından kalkılamaz hale gelebilir. Ve oyun şeması bütün konumları ve bütün muhtemel hamleleri içereceğinden, basit oyunların bile devasa oyun şemaları olabilir. Bu da kapıyı kabus oyunlarına açar.

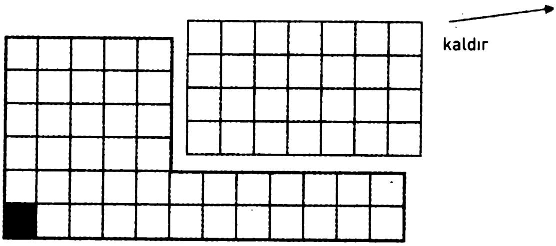
Şimdi pis çoki oyununu, kuralları hemen hemen aynı olan ama oyun şemasını budamanın imkansız olduğu –ve imkanlı *olduğu* yerlerde de basit bir kazanma stratejisini ortaya çıkaracak desenin gözlemlenemediği bir oyunla karşılaştıracağız. Uzun yıllar önce David Gale (Berkeley Üniversitesi, California) tarafından icat edilmiş ve muhteşem bir dinlence ve eğlence amaçlı matematik kitabı olan *Tracking the Automatic Ant*[1]'de (Ek Kaynaklar) anlatılmış bu oyunun adı çomp. Gale çompu dikdörtgen şekilli kurabiye ya da bisküvi düzenlemeleri üzerinden anlatsa

1- Otomatik Karıncanın izini sürmek.

da ben çikolatayla devam edeceğim. (En iyisi düğme ya da taş gibi objelerden oluşan bir düzenleme üzerinde oynamaktır.) Şekil 66'da da gösterildiği üzere bu oyunun Pis çokiden tek farkı, hamle olarak dikdörtgensel bir parça koparılmasıdır. Şöyle ki oyuncu çikolata karelerinden birini seçer ve o karenin yukarısında ve solunda olan her kareyi, o kareyle beraber koparır.

1×1'lik oyun hariç her oyunda (Şekil 67a), Pir'in kazanma stratejisi olduğuna dair oldukça güzel bir ispat var. Tersini farz ederek, Ki'nin bir kazanma stratejisi olduğunu kabul edelim. Şu halde Pir, yukarı sağdaki kareyi kaldırarak oyuna başlar (Şekil 67b). Bu Ki'yi kaybeden bir konumda bırakmış olamaz zira

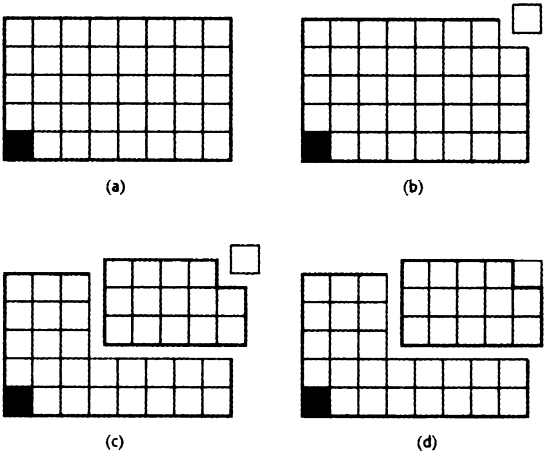
Şekil 66 Çomp oyununda tipik bir hamle.



açılış konumunun Pir için kaybeden olduğunu biliyoruz. Yani Ki, Şekil 67c'deki gibi kazanan bir hamle yaparak Pir'e kaybeden bir konum bırakabilir. Ama o zaman da Pir en baştan, Şekil 67d'dekine benzeyen bir hamle yaparak Ki'ye aynı kaybeden konumu bırakabilirdi. Bu, Ki'nin kazanma stratejisi olması varsayımımızla çelişir, haliyle o varsayım doğru olamaz. Bu yüzden de Pir'in bir kazanma stratejisi vardır.

Bu cins ispatlara "strateji hırsızlığı" denir. Eğer Pir, "numara radan" bir hamle yapıp ikinci oyuncuymuş gibi davranarak, Ki için kazanan strateji olması gereken protokolü takip edip oyunu kazanabiliyorsa Ki'nin en baştan böyle bir stratejiye sahip olmaması gerekirdi –bu yüzden de Pir'in kazanma stratejisi olması gerekir. Bu ispat yönteminin ironisi, tabii ispat çalıştığı zaman, Pir'in kazanma stratejisinin ne olması gerektiğine dair en ufak bir ipucu vermemesidir!

Çomp için detaylı kazanma stratejileri, birkaç basit durum



Şekil 67

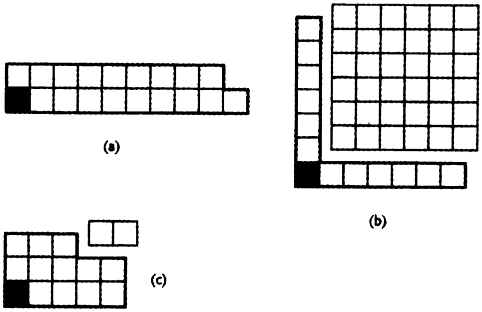
(a) Strateji hırsızlığına hazır çomp barı
(b) Eğer Pir bunu yaparsa...
(c) ... ve Ki'de güya kazanma hamlesi yaparsa...
(d) ... Pir en başta Ki'nin hamlesini yapabilirdi.

hariç bilinmiyor. 2×n (ve n×2) durumunda Pir, Ki'nin her zaman bir dikdörtgen eksi bir köşe karesi durumuyla yüz yüze kalmasını sağlayabilir (Şekil 68a). Pir, n×n durumunda, L şeklinde bir köşe hariç (Şekil 68b) her şeyi kaldırdıktan sonra Ki'ne yaparsa aynısını, diyagonal üzerinden yansımasını alarak yapabilir. Birkaç başka, küçük durum daha bilinmektedir: örneğin 3×5'lik çompta Pir için yegane kazanma hamlesi Şekil 68c'dekidir. Kazanma hamlesinin tek tip olması şart değildir: 6×13'lük oyunda iki farklı kazanma hamlesi vardır. Çomp konumları hakkındaki başka bilgiler, Berlekamp, Conway ve Guy'ın *Winnig Ways*[2] adlı kitabında (Ek Kaynaklar) bulunabilir. Çomp sonsuz bir çikolata barı üzerinde de oynanabilir –ki bu durumda, paradoksal şekilde, yine sonlu bir oyun olmaya devam eder çünkü sonlu tane hamle sonunda geriye sadece sonlu bir çikolata barı kalır. Ama bir fark daha var: Ki bazen kazanabilir. Bu durum, örneğin n×∞'luk barda gözlemlenebilir. Şekil 69 göstermektedir ki Pir ne yaparsa yapsın Ki öyle bir cevap verebilir ki

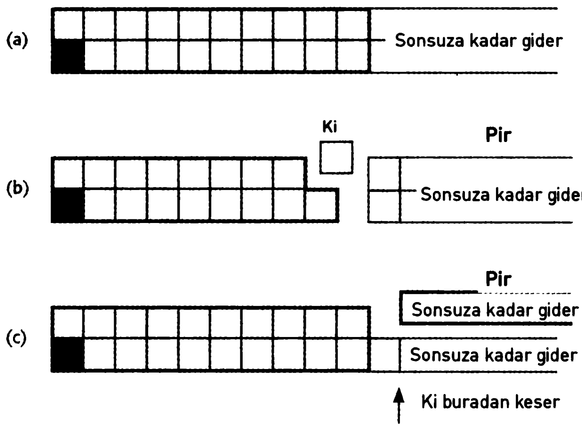
2- Kazanmanın Yolları.

Şekil 68

...daki kazanma hamleleri.
(a) 2xn çomp
(b) nxn çomp
(c) 3x5 çomp.



Pir, kaybeden olduğunu bildiğimiz Şekil 68a'yla yüz yüze kalır. Daha açık konuşmak gerekirse, burada dikkatli olmam lazım. ∞ ile kastettiğim şey, aslında normal sıralamaları altındaki tam sayılar kümesidir ki matematikçiler bunu ω ile ifade ederler ve "ilk sonsuz ordinal" derler. Birçok başka sonsuz ordinal vardır ama özellikleri burada anlatamayacağımız kadar teknikseldir: daha fazla detay için Gale'in kitabına bakabilirsiniz. Çomp, çift taraflı sonsuz ordinaller üzerinde ya da üç boyut ve fazlasında oynanabilir: ama sonuçta, bu genişlemeler üzerindeki kazanma stratejileri hakkında çok az şey bilinmektedir.

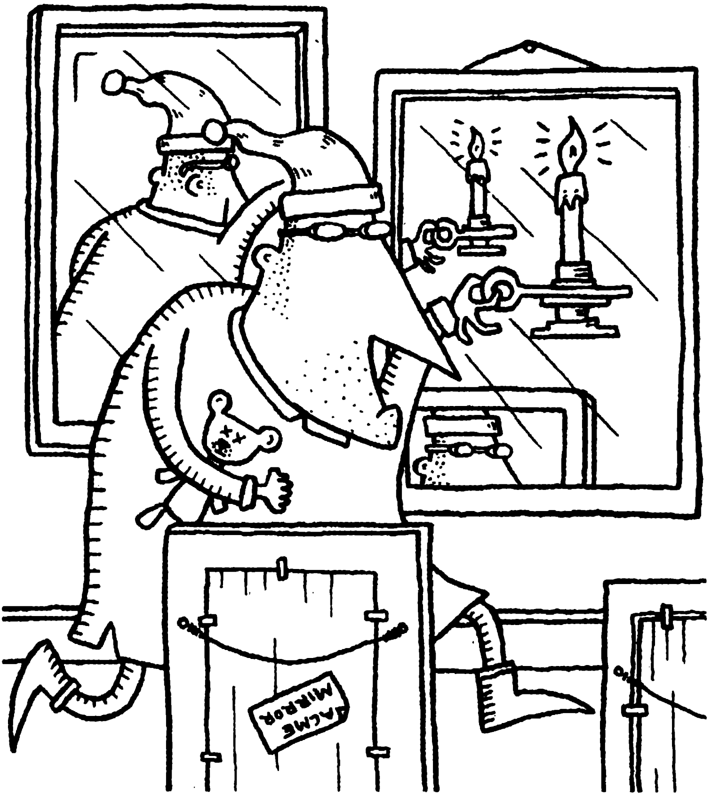


Şekil 69 Ki, 2×∞ çomp oyununu nasıl kazanır.

(a) Başlangıç.
(b) Pir için muhtemel iki hamleden biri ve cevabı.
(c) Pir için muhtemel iki hamleden diğeri ve cevabı.

18

Karanlık Noktalar



Eğer iki kişi, aynadan bir oda içerisinde beklerken içlerinden birisi kibrit yakarsa, bu kibritten çıkan ışık bazı aynalar üzerinden yansıyarak zayıflayacak olsa da yeterince kuvvetliyse, diğeri bu kibriti her zaman görebilir mi? Kavisli aynalar kullanıldığında cevap, "hayır". Peki ya aynalar düzse? 1995'de ispatlandığı üzere cevap orada da "hayır". İspat, beklendiği üzere, yansımaların akıllıca bir kullanımıyla alakalı.

Angela aynadan –duvarları kusursuz yansıtıcıdan– bir odada bekliyor. Odanın başka bir noktasındaki arkadaşı Bruno bir kibrit yakıyor. Bulundukları konumdan bağımsız olarak Angela'nın kibriti ya da yansımalarından birini her zaman görebileceği doğru mudur? Buna denk olarak, rastgele yerleştirilmiş bir kibritin odayı –tek bir noktayı bile atlamadan– aydınlatması manasında, oda "her noktadan aydınlatılabilir" midir?

Bu soru yazılı olarak ilk kez Victor Klee tarafından 1969'da sorulmuştur ama kökenlerinin çok daha geriye, en azından 1950'lerde Ernst Straus'a kadar gittiği sanılmaktadır. Soru birçok farklı şekilde görülebilir: oda, basitçe iki boyutlu ya da gerçek üç boyutlu bir obje olabilir: ikinci durumda tavan ve tabanın da –daha genel olarak bütün iç yüzeylerin– aynadan yapılmış olması gereklidir. İki durumda da sorumuzu, düz kenarlı odalara –iki boyutta poligonlar ve üç boyutta polihedronlar– ya da kavisli kenarlı odalara uygulayabiliriz. Sorunun matematiksel olarak idealleştirildiği her durumda, Angela'nın gözü ve Bruno'nun alevi, odanın ayna kaplı sınırları üzerinde olmayan noktalar olarak kabul edilir ve Angela'nın da Bruno'nun da saydam olduğu düşünülür. Sınırın herhangi bir noktasındaki yansıma kanunu alışık olduğumuz şekilde: "yaklaşma açısı yansıma açısını eşittir" olarak kabul edilir. Sadece tek bir teğet doğrusu olan noktalarda bu açılardan bahsedilebilir, bu yüzden de gele-

neksel olarak, poligon ya da polihedronların köşeleri gibi sınırın aniden yön değiştirdiği ve tek bir teğet doğrusu olmayan noktalara vuran ışınların "emilerek" daha ileriye gitmedikleri farz edilir.

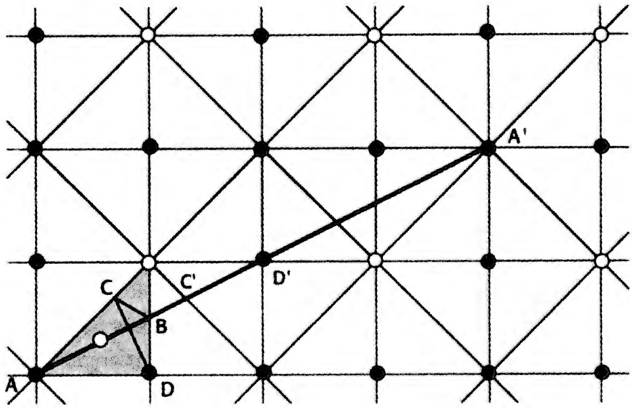
İki boyuttaki negatif cevap ki bu bölümün sonraki kısımlarında anlatacağım, 1958'de L. Penrose ve Roger Penrose tarafından sağlanmıştır. Bu ispat, kavisli sınırlar gerektiriyordu ve düzlemsel poligon odalarda ki soru yakın zamana kadar açık kalmıştı. Çözümü *The American Mathematical Monthly*'nin[1] Aralık 1995 sayısında (Ek Kaynaklar), George Tokarsky tarafından yayınlanmıştır. Bulmuş olduğu asil ispat, beklendiği üzere bir "yansıma marifeti" kullanmaktadır ve her iyi ispatta olduğu gibi şaşırtıcı şekilde basittir. Aynı tür yansıma marifetleri, matematikte geniş kullanım alanı bulmaktadır. Tokarsky kendi yöntemini genelleştirerek iki ve üç boyutta, her noktadan aydınlatılamayan düz kenarlı başka oda örnekleri de sağlamıştır.

Buradaki anahtar fikir, dik açılı bir ikizkenar üçgenle –bir açısı 90° iki açısı 45° olan, bir karenin köşegeni boyunca ikiye bölünmüş haliyle başlamaktır. Böyle bir üçgen kenarları etrafında tekrar tekrar yansıtılıp, düzgün bir ızgara desenine "açılabilir" (Şekil 70). Böyle bir üçgenden modellenmiş ve duvarları aynadan bir oda içerisinde duruyor olsaydınız, duvarların kaleydoskopik bir etkisi olurdu ve ızgara desenini "görürdünüz".

Izgara deseni anahtar önemdeki bir gerçeğin ispatlanması için kullanılır: eğer kibrit böyle üçgen şekilli bir odanın 45°'lik köşelerinden birine yerleştirilirse bu kibritten çıkan ışınların hiçbiri, ne kadar yansıma olursa olsun, kibrite geri ulaşamaz. Sebebini görmek için öncelikle herhangi bir ışının, mesela ABCD olarak işaretlenmiş ışının, aynı üçgen gibi açılabildiğini görmeniz gerekir. Örneğin üçgenin içindeki BC parçası duvarın öteki tarafında BC' olarak açılır ve bu işleme devam edersek CD de C'D' olarak açılacaktır. Yani buradaki ABCD bize ABC'D' verecek şekilde açılacaktır. Yansıma kanunları ABC'D' çizgisinin düz bir doğru olmasını garantiliyor ve bu gerçek de şimdi yapacaklarımız için oldukça elzem.

1- Amerikan Aylık Matematiksel.

Üç köşeyi, 45°'lik A köşesi siyah, diğer 45°'lik köşe beyaz ve 90°'lik köşe de gri olacak şekilde renklendirdik. Tasvir edilmiş ABCD yansıması D noktasında duruyor çünkü bu nokta üçgenin bir köşesine denk geliyor: buna denk olarak da "açılmış" olan D' noktasının ızgara üzerinde yer alması gerekiyor. Şimdi herhangi bir yansımanın yukarıdaki örneğe benzer bir şekilde, A noktasından farklı bir köşeden geçmeden A noktasına geri dönemeyeceğini –bu yüzden de böyle bir yansımanın gerçekleşemeyeceğini iddia ediyoruz.



Şekil 70 İkiz kenarlı dik bir üçgen, (gölgelendirilmiş) tekrar tekrar yansıtılarak "açılıyor": noktalar, ızgara üzerindeki konumlarla üçgenin köşeleri arasındaki ilişkiyi gösteriyor. ABCD gibi bir ışın da ABC'D' düz çizgisini verecek şekilde açılıyor. A'da başlayıp yine A' da bitecek bütün muhtemel ışınlar gri ya da siyah bir ızgara noktası üzerinden geçmek zorunda (bu örnekte D') haliyle de gerçek bir ışın bir köşeye çarpmak ve durmak zorunda.

Söylediklerimizi ispatlamak için A' dan A' ya giden bir yansımamız olduğunu hayal edelim, bu yansımayı A'dan bir A' noktasına düz bir doğru üzerinde gidecek şekilde açabiliriz. Izgaramızı geri katladığımızda A' noktası A' nın üzerine geleceğinden, A''ın siyah noktalardan biri olmak zorunda olduğu görülür. Şimdi, siyah noktalar hem yatay hem de dikey olarak çift ızgara noktası aralıklarla yerleştirilmişlerdir –koordinatları her zaman çift sayıdır. Bu da gösterir ki AA' çizgisi üzerinde bir yerde beyaz

ya da gri bir nokta olmak zorundadır. Yatay veya dikey aralıklar, bir tek sayının iki katı olduğu durumlarda bu gerçeği görmek çok kolaydır çünkü o zaman AA′ çizgisinin orta noktasının koordinatlarından en az biri tek sayı olmak zorundadır ki bu da gri ya da beyaz bir nokta olduğunu gösterir. Bu argüman, iki koordinat da dördün katı olduğu durumlarda çalışmaz ama o zaman AA′ çizgisinin orta noktası A′, ızgaranın üzerindeki siyah bir noktadır ve AA″ çizgisini dikkate alarak tekrar deneyebiliriz. O çizginin ya orta noktası gri veya beyazdır ya da A′ın *da* koordinatları dördün katıdır. İkinci senaryonun doğru olduğu durumlarda A′'yı yeni orta nokta olan A″la değiştirip devam edebiliriz. Bu yer değiştirmelerden sonlu tane yaptıktan sonra ilk senaryonun doğru olduğu bir duruma ulaşmamız kaçınılmazdır. Örneğin, A′'ın yatay koordinatı 48 ve dikey koordinatı da 28 ise A′'ın koordinatları (24,14)'dür, A″'ın koordinatlarıysa (12,7). Bu yüzden de AA″'ın orta noktası ızgara üzerindeki beyaz veya gri bir noktadır.

Yukarıda yaptıklarımız ışığında görüyoruz ki A ile ızgara üzerindeki *herhangi* bir siyah noktayı birleştiren doğru parçası her zaman gri veya siyah bir noktanın üzerinden de geçmek zorundadır; şimdi doğru parçasını gerisin geri katlayarak, üçgenin içindeki esas yansımanın A'ya geri dönemeden diğer kenarlardan birine çarptığını (ve durdurulduğunu) göstermiş oluruz. Bizim de doğruluğunu ispatlamak istediğimiz şey buydu.

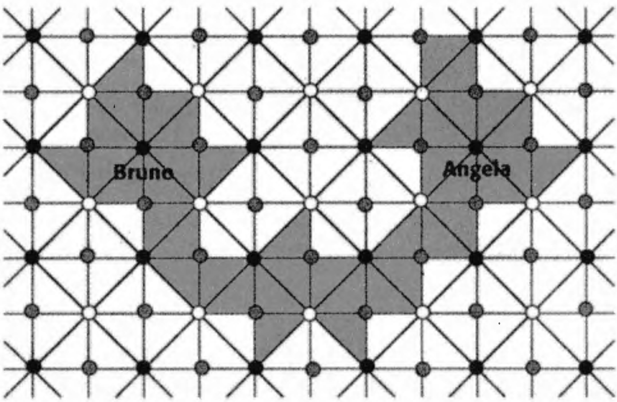
Poligonsal odaları, Şekil 70'de çizilmiş olan ızgaranın yatay, dikey hatta çapraz kesitlerini birleştirerek oluşturabiliriz. Farz edelim ki bir ışık huzmesi, böyle bir oda içerisinde bir siyah noktada başlayıp (Bruno) bir diğer siyah noktaya (Angela) varırken eşit açılar ilkesi çerçevesinde sağdan sola yansıyor olsun. Şu halde elimizdeki yansıma izini katlayarak ızgarayı kurduğumuz esas ikizkenar dik üçgenimizde bir yansıma izi elde edebiliriz. Ne var ki böyle bir yansıma izinin gri veya beyaz bir noktaya çarpmak zorunda olduğunu biraz önce göstermiştik ve böylece de katlı yansımamızı tekrar açınca yine gri ya da beyaz bir ızgara noktasına çarpacağını anlamış olduk. Yani Bruno'da

başlayıp ayna duvarlardan yansıyarak Angela'da biten herhangi bir ışık huzmesinin, yol üzerinde gri ya da beyaz bir noktadan geçmek zorunda olduğunu gösterdik. Şimdi farz edelim ki aşağıdaki üç şartın sağlanması için gerekli olan her şeyi yaptık:

- Angela ve Bruno'yu temsil eden iki noktanın odanın iç kısmında kalması.
- Hiçbir gri ya da beyaz noktanın odanın içinde kalmaması.
- Odanın sınırlarındaki her beyaz ve gri noktanın bir köşe üzerinde olması.

Şu halde gri veya beyaz herhangi bir ızgara noktasından geçen ışın bir köşeye çarpmak ve durmak zorundadır –yani böyle bir ışık huzmesinin varlığı mümkün değildir.

Şekil 71'de böylesi bir odaya örnek verilmiştir. Yukarıda ki gibi bir oda tasarlama işine girişirseniz, bu işin belli bir miktar hüner gerektirdiğini görürsünüz. Örneğin, odanın sınırları üze-



Şekil 71 Bruno'nun yaktığı kibriti, Angela'nın göremeyeceği aynadan bir oda.

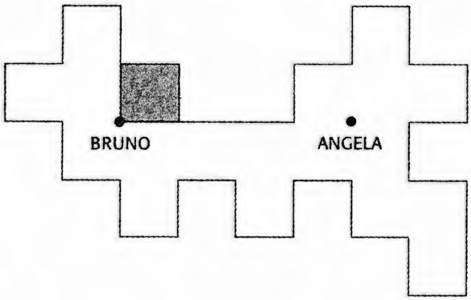
rinde olan ama bir köşede olmayan gri ve beyaz noktalar sandığınızdan daha kolay ortaya çıkan bir sorundur; bunu çözmek için yeni köşeler oluşturmak amacıyla yeni üçgenler eklediğinizdeyse, yeterince dikkatli olmazsanız bu üçgenler yeni iç noktalar oluşturabilirler ki onu da istemezsiniz çünkü ikinci kuralı ihlal edebilirler... Ama biraz dikkatle, çözülemeyecek bir sorun değildir.

Şekil 71'de gösterilen oda, esas ikizkenar dik üçgenin 39 kere yansıtılmasıyla elde edilmiştir. Tokarsky'nin makalesi, sadece 29 kopyayla elde edilen bir oda içermektedir. Siz bu odayı bulabilir misiniz? Daha iyisi yapılabilir mi? Peki ya köşe sayısını minimize etmek mümkün müdür? Tokarsky ayrıca, dik ikizkenar üçgenle-

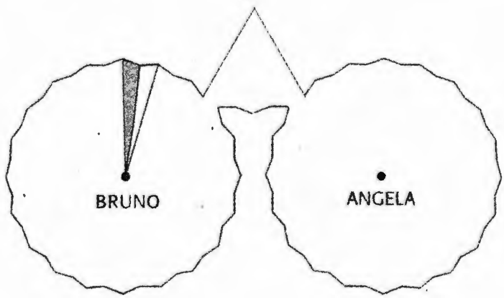
Şekil 72

Angela, ... yansıtılarak elde edilen bu odalarda da Bruno'nun kibritinden çıkan ışığı göremez.

(a) kareler



(b) 9°, 72° ve 99° açılı üçgenler

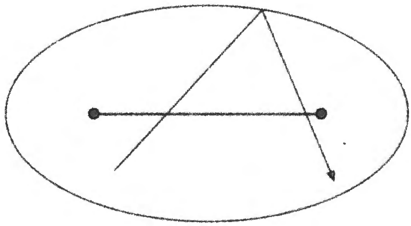


rin katlanması yerine karelerin (Şekil 72a) ve başka şekillerdeki üçgenlerin katlanmasıyla elde edilen odalar (Şekil 72b)ve hatta benzer yansıma teknikleriyle geliştirilmiş üç boyutlu odalarla ilgili benzer bir kuram geliştirmiştir.

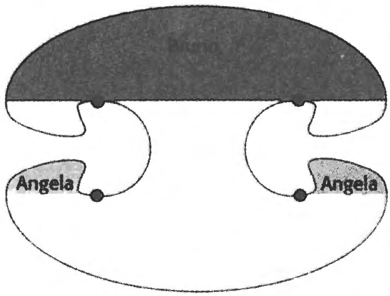
Bu örnekler gösteriyor ki poligonsal odalarda her tarafın aydınlanmasına engel olacak kibrit yerleşimleri vardır. Ne var ki şimdiye kadar en azından bir noktanın aydınlanmayacağını gösterebildik. Alanı sıfırdan büyük, aydınlatılamaz bir *bölgenin* varlığı mümkün müdür? Bu soru çok daha alengirlidir –örneğin Şekil 70'de Bruno'dan başlayan ışınların Angela'nın istediğimiz

kadar yakınından geçip geçmeyeceği göstermiş değiliz ki göstermek, kolay değildir. Bildiğimiz tek şey *tam olarak* Angela'ya çarpmayacaklarıdır. Cevap, poligonsal odalar için bilinmiyor gibi ama odanın kenarları kavisliyse, Penrose karolarından çıkan akıllıca bir argüman gösteriyor ki aydınlatılamayan bölgelerin varlığı mümkün. Elips olarak bilinen eğrinin, *odak noktaları* olarak bilinen iki adet özel noktası olduğunu hatırlayalım (Şekil 73a). Odak noktaları arasından geçip eğri yüzeyde yansıyan herhangi bir ışının bir eğriyle olan sıradaki çarpışması gerçek-

Şekil 73



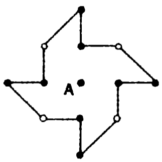
(a) Bir elipsin odak noktaları arasından geçen ışın, yine odak noktaları arasından geri yansır.



(b) Odak noktaları şekilde gösterilen iki adet yarım elips, kavisli eğriler kullanılarak ki bu kavislerin kesin şekli önemli değildir, birleştiriliyor. "Bruno" bölgesi içerisinde başlayan hiçbir ışın, iki "Angela" bölgesine de ulaşamaz.

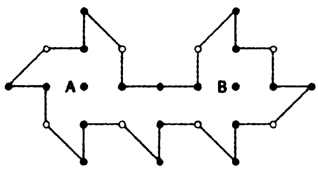
leşmeden önce, yine odak noktaları arasından geçmek zorunda olduğu ispatlanabilirdir. Odak noktalarının "arasından geçmek" derken kastettiğimiz şey "odak noktalarını birleştiren düz çizginin üstünden" geçmesidir. Bu özelliği aklımızın bir köşesine not aldıktan sonra Şekil 73b'deki odanın aydınlatılamaz bölgeleri olduğunu görmek kolaydır. Daha net olarak, Bruno olarak işaretlenmiş gölgeli bölgenin içinden başlayan ışınlar asla, Angela olarak işaretlenmiş hafif gölgeli bölgelerin içine giremezler.

Tokarsky bana yolladığı bir mektupta, başka birçok örnek ve



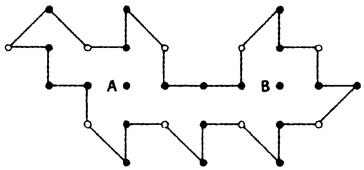
Şekil 74

A konumdaki bir nokta olduğunuzu farz edersek, kendi yansımanızı göremeyeceğiniz bir oda.



Şekil 75

24 kenarlı, aydınlatılamaz bir oda.



Şekil 76

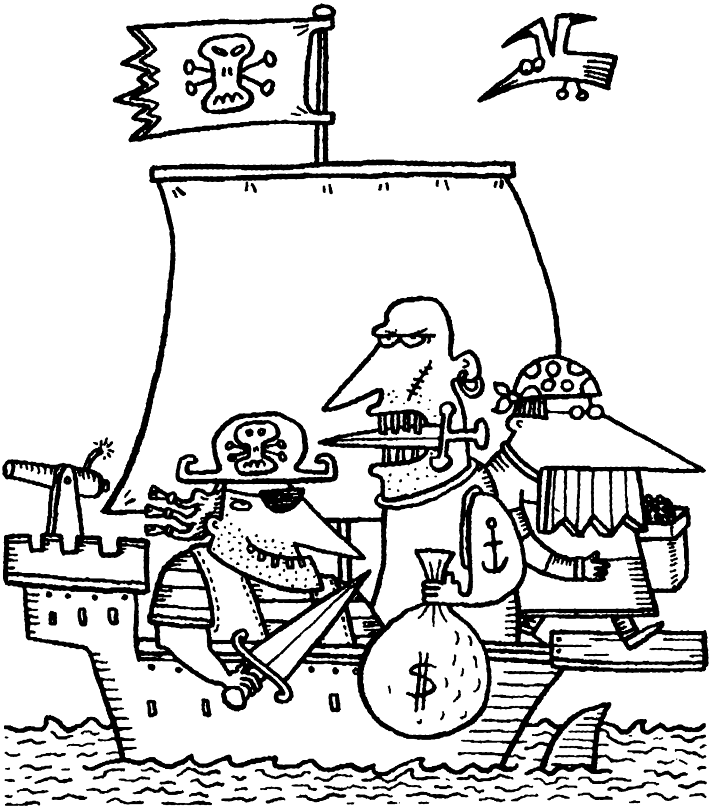
Bir tek sayı olan, 27 kenarlı aydınlatılamaz oda.

bazı genellemeler göstermiş. Aralarından seçtiklerim şöyle. Öyle poligonsal odalar vardır ki kendi kendinizin yansımasını göremezsiniz (eğer bir noktadan ibaretseniz), örneğin Şekil 74. Yukarıda verilen örneklerin hepsinden daha az kenarla, 24 kenarlı aydınlatılamaz bir oda vardır (Şekil 75). Ve şimdiye kadar sizlere sunmuş olduğum bütün örneklerin çift sayıda kenarı varsa da tek sayı olan, 27 kenarlı bir örnek de vardır (Şekil 76).

Buna benzer, bazıları çözülmüş ama bazıları hala daha çözülememiş birçok problem var. J. Rauch, sınırlarının bir nokta hariç her noktada teğeti olan ve aydınlatılabilmesi için sonsuz tane kibrit gerekli bir odanın varlığını göstermiştir. Ayrıca göstermiştir ki her sonlu kibrit sayısı için, sınırındaki her noktada teğeti olan ve o sayıda kibritle aydınlatılamayacak bir oda vardır. Ve J. Pach'de şu asil soruyu sormuştur: kusursuz yansıtıcı yüzeylere sahip ağaçlardan oluşan bir ormanda bir kibrit yakarsanız, ışık ormanın dışına çıkmak zorunda mıdır? Buradaki ağaçlar, örneğin, birer daire olarak modellenebilir ve soru bir düzlem üzerine indirgenebilir. Cevabı bilinmemektedir.

19

Karmaşık Korsansal Kararlar



Korsanlar amansızlardır ama demokratiklerdir de. En son vurgunlarından gelen ganimetleri paylaşırken, aralarından en amansız olan ganimetin nasıl bölüneceği üzerine bir öneride bulunur ve bu öneri oylanır. Eğer öneride bulunan korsan oylamayı kaybederse, geminin kalasında yürütülüp denize atılır ve bir sonraki en amansız korsan bir teklifte bulunur, böylece de devam eder. On korsan ve 100 altınlı bir durumda hangi teklif, en amansız korsana en büyük voliyi vurdurur? Peki ya 500 korsan olsa ama yine 100 altın varsa? Cevaplar çok şahane –cevapların varlığıysa, daha bile şahane.

Matematiksel mantık, bazen insanları acayip görünen sonuçlara yönlendirebilir. Burada geçerli olan kural, mantığın kendi içinde delikler *yoksa* varılan sonucun tutarlı olacağıdır. Eğer bu sonuçlar sizin önsezinizle çelişiyorsa, ya önseziniz başka bir bağlamda iyi olsa da üzerinde durmakta olduğunuz bağlamda pek işe yaramazdır –ya da önsezinizi iyileştirmeniz gerekmektedir.

Stephen M. Omohundro, 1998 senesinin Eylül ayında bana tam da bu sınıflandırmaya düşen bir bulmaca gönderdi. Bulmaca Steven Landsberg (Illinois Üniversitesi, Urbana Champaign) tarafından icat edilmişti ve Omahundro da bulmacanın, mantığın inanılmaz bir şekilde kıvrılarak takdire şayan sonuçlar çıkardığı bir türevini bulmuştu.

Evvela bulmacanın esas hali:

On tane korsan 100 altınlık bir hazineyi ellerine geçiriyorlar ve ganimeti aralarında paylaşmak istiyorlar. Bunlar, kendilerince demokratik korsanlar ve böyle paylaşımları aşağıdaki gibi yapmayı adet edinmişler. En amansız korsan paylaşım için bir teklifte bulunuyor ve herkes oy kullanıyor –teklifi veren de dahil herkesin bir oy hakkı var. Eğer %50 ya da daha fazla korsan kabul etmişse teklif geçiyor ve olduğu gibi uygulanıyor. Aksi halde teklifi veren kişi geminin kalasında yürütülüp denize atılıyor ve prosedür sıradaki en amansız korsanla tekrarlanıyor.

Bütün korsanlar insanları gemiden atmayı eğlenceli buluyor

ama daha iyi bir seçenekleri varsa nakit parayı tercih ediyorlar. Kendilerinin gemiden atılması fikriyse pek hoşlarına gitmiyor. Bütün korsanlar akılcı, diğer bütün korsanların da akılcı olduğunu biliyor, diğer bütün korsanların onların akılcı olduğunu bildiğini de biliyor, vesaire. Belirgin şekilde daha basit şemaları olan benzer bulmacaların aksine (Bakınız Bölüm 1), bu bulmaca bir parça "ortak bilginin" ifşa edilmesiyle çorap gibi *sökülmüyor*. Herhangi bir ortak bilgi zaten ortak olarak biliniyor. Daha da ötesi hiçbir korsanın amansızlığı bir diğeriyle aynı değil, yani bir "hiyerarşi" var ve bu hiyerarşi bütün korsanlar tarafından biliniyor. Son olarak: altın parçaları bölünemezler ve tek bir parçanın bir şekilde paylaşılması gibi anlaşmalara izin yok (sonuçta hiçbir korsan, meslektaşlarının böyle bir anlaşmaya sadık kalmasını beklemiyor). Her adam kendi başına!

Hangi teklif en amansız korsanın kazançlarını tavana vurdurur?

Omohundro'nun katkısı da aynı soruyu on yerine 500 korsanla sormaktan ibaret. (Yine 100 altın var.) Kolaylık olsun diye korsanları, en çelimsiz 1 numara ve en amansız 500 numara olacak şekilde amansızlık seviyelerine göre sıralandıralım. En amansız korsan en büyük sayıyı alıyor ve teklif sırası da yukarıdan aşağıya doğru ilerliyor.

Omohundro'yu takip ederek sizleri, on-korsanlık sorunun çözümünün şöyle olması gerektiğine ikna etmeye çalışacağım: 10 numaralı korsan, 8, 6, 4 ve 2 numaralı korsanlara birer altın verip tek numaralı korsanlara hiçbir şey vermeyerek 96 altın parçasını kendine ayırmaya çalışıyor. Buna karşılık olarak 500 korsanlık versiyondaki cevapsa ilk 44 korsanın denize atılması ve bunun sonunda da 456 numaralı korsanın .... maalesef çok fazla detayı ele vermek durumundayım, bu yüzden çözümüm devamı için beklemeniz gerekecek.

Bölüm 17'de gördüğümüz üzere bu tür oyunlarda strateji analizi yapmak için sondan başlayıp geriye doğru çalışmak gerekiyor. İşin sonunda, hangi kararların doğru ve hangilerinin yanlış olduğunu bilebilirsiniz. Elinizde bu bilgi varken de sondan

bir önceki kararın üzerinde çalışıp çözebilirsiniz, elinizde o bilgi varken de sondan iki önceki kararın üzerinde çalışıp çözebilirsiniz ve böylece ilerleyip gider. Kararların alındığı sırayla, baştan başlayıp ilerlemeye çalışırsanız fazla yol kat edemezsiniz. Sebep, stratejik kararların her zaman "Ben *bunu* yaparsam sıradaki adam ne yapar?" şeklinde ilerlemesidir ki bu yüzden de sizden sonrakilerin kararları önemlidir. Sizden öncekilerin kararlarıysa görmezden gelinebilir çünkü o kararları değiştirmek için elinizden hiçbir şey gelmez.

Bunu dikkate alırsak, başlamamız gereken nokta oyunun sadece iki korsana, K1 ve K2'ye düştüğü (düşebilirse!) andır. En amansız korsan K2 olsun, (oyun bu noktalara kadar gelirse) alabileceği en verimli karar açıktır: 100 altının hepsini kendine alır ve K1'e hiç altın vermez. Sadece kendi oyu %50'yi sağlayacağından altınları alır. Şimdi, korsan K3'ü ekleyelim. Korsan K1 biliyor ki –ve K3, K1'in bildiğini biliyor– K3'ün teklifi kabul edilmezse K1 hiçbir şey alamayacak. Bu yüzden de K1, hiçbir şeyden fazlasını elde etmek şartıyla K3'ün bütün tekliflerini kabul edecektir. K3'de haliyle, K1'in kabul edeceği en düşük rüşveti veriyor ki şu teklif ortaya çıkıyor: K3'e 99 altın, K2'ye 0 altın ve K1'e 1 altın. Şu şekilde yazalım:

K1	K2	K3
1	0	99

K4'ün düşünce süreci de benzerdir. Oyların %50'sine ihtiyacı vardır ve yine tam olarak bir korsanı kendi tarafına çekmelidir. Kullanabileceği en düşük rüşvet miktarı bir altındır ve bunu K2'ye önerebilir zira K4'ün teklifi kabul edilmez ve K3'ün teklifi oylanırsa, K2 hiçbir şey alamayacaktır. Bu yüzden de bu noktada teklif edilen dağılım şu hali alır

K1	K2	K3	K4
0	1	0	99

K5'in düşünme süreci biraz daha inceliklidir. En az *iki* korsana rüşvet vermesi gerekmektedir. Kullanabileceği en düşük toplam rüşvet miktarı iki altındır ve bu veriler altında başarıya ulaşabilmesi için yegane yol şu teklifi vermektir:

K1	K2	K3	K4	K5
1	0	1	0	98

Her teklifin, teklifi verene en fazla altını yeterince taraftar toplayarak kazandıran tek çözüm olduğu bu çözümleme, aynı teknikle devam eder. Ta ki sıra onuncu korsana ve şu çözüme gelinceye kadar

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10
0	1	0	1	0	1	0	1	0	96

Bu daha önce de belirtmiş olduğum tekliftir ve on-korsanlık bulmacayı çözer.

Şimdi sıra Omohundro'nun ayrımında: peki ya (çok) daha fazla korsan varsa ne olur? Açıkça görünmektedir ki aynı desen devam eder –tabii bir yere kadar. Aslında 200 korsana kadar devam eder. K200, K1-K199 arası tek sayılı korsanlara hiçbir şey vermez ve K2-K198 arası her çift sayılı korsana bir altın verir, kendisine de bir altın kalmış olur.

Ne var ki biz, K500 için bir strateji bulmaya çalışıyoruz. İlk bakışta argüman, K201'in verecek rüşveti kalmadığı için K200'de çöker. Ne var ki gemiden aşağıya atılmak hala daha aleyhine olacaktır, bu yüzden de hiçbir şey almamayı kabul edebilir:

K1	K2	K3	K4		K197	K198	K199	K200	K201
1	0	1	0		1	0	1	0	0

Bu, stratejide yeni bir evreyi başlatır çünkü korsan K202 *bilir* ki K201 hiçbir şey almamayı kabul edecektir, yoksa gemiden atılır. Bu yüzden de K201'in oyuna güvenebilir. Ne var ki K202'de hiçbir şey almamayı kabul etmek durumundadır. 100 altının hepsini kullanarak 100 korsana rüşvet vermek zorundadır –ve bu korsanlar da K201'in teklifinde sıfır alan korsanlar olmalıdır. Böyle 101 tane korsan bulunduğundan K202'nin tek bir çözümü yoktur. K202'in teklifinden bir şeyler alma *ihtimali olan* korsanları yıldızla işaretleyelim:

K1	K2	K3	K4	...	K197	K198	K199	K200	K201	K202
0	*	0	*		0	*	0	*	*	0

Bu noktada dikkat edilmesi gereken bir nokta daha var. Bir altın parçası alma *ihtimali* olan korsanların, kesinlikle bir altın

parçası alacağı söylendiği zaman verecekleri tepki üzerine de düşünülmelidir. Bu, bir korsanın ortalama ne kadar parayı birisini gemiden atma zevki için kurban edeceğine bağlıdır. Bulmaca bunu özellikle belirtmez, bu yüzden de korsanların bu bilgiye sahip olmadıklarını farz etmek akılcıdır. Buradan çıkan anlam rüşvetin işe *yarayabileceği,* bu yüzden de sonraki adımlarda bir altın parçası kazanma ihtimali olan korsanlara bu adımda kesin bir altın parçası teklif etmenin mantıklı olduğudur.

İşlerin, aslında daha tatminkar olduğu ortaya çıkıyor: o kadar çok kesin 0'lık korsan var ki sadece *onlar* arasında rüşvet dağıtmak yeterli olacak. Gerçekten de Peter Norvig'in gösterdiği üzere her durumda, K1-K200 arasında bulunan 100 korsan 0 çekecektir; bu yüzden de sadece onlar arasından (bazı) kişilere rüşvet verildiği algoritmalar üzerinde çalışabiliriz. 203 numaralı korsanın, yeterince korsana teklifini, artık o teklif her neyse, kabul etmeleri için rüşvet verecek kadar parası olmadığı açık göründüğünden, neden bu kadar zahmete girdiğimi merak edebilirsiniz. Doğrudur ve K203 ne teklif ederse etsin gemiden atılacaktır –ki biz bu durumu × şeklinde çarpı ile ifade edeceğiz. Tercihlerinin durumla alakasız olduğunu belirtmek için de ? yazacağız, böylece ortaya çıkan durum:

K1	K2	K3	K4	...	K197	K198	K199	K200	K201	K202	K203
?	?	?	?		?	?	?	?	?	?	x

Kalasta yürümek K203'ün kaderinde olsa da bu, ilerleyen anlarda oynayacak bir rolünün olmadığı manasına gelmez. Tam tersine K204 şimdi biliyor ki K203'ün hayattaki tek amacı, ganimetin dağılımı için bir teklif vermek zorunda kalmaktan kaçınmaktır. Yani K204, teklifi her ne olursa olsun K203'ün oyunu alacağına güvenebilir. Şimdi, K204 ucundan kurtarıyor –kendi oyuna güvenebilir, K203'ün oyuna güvenebilir ve rüşvet vereceği diğer 100 korsanın oyuna da güvenebilir: toplamda 102 oy eder ki gerekli olan %50'yi sağlamış olur. Yani K204'ün teklifi şöyle olacaktır:

K1	K2	K3	K4	...	K197	K198	K199	K200	K201	K202	K203	K204
*	0	*	0	...	*	0	*	0	*	*	0	0

Peki ya K205? Kendisi o kadar şanslı değil! K203 ve K204'ün oylarına güvenemez: eğer ona karşı oy kullanırlarsa gemiden birini atarak eğlenebilir ve yine de kendilerini kurtarabilirler. Yani K205 × oluyor. K206 da gidici –K205'in oyuna güvenebilecek olsa da bu onu kurtarmaya yetmiyor. Aynı şekilde, K207'nin 104 oya ihtiyacı var– 3 artı kendi oyu artı rüşvetlerden gelen 100 oy. K205 ve K206'nın oylarını alabilir ama bir tane daha oya ihtiyacı var ve öyle bir oy yok. Yani K207 de × oluyor. K208 daha şanslı. Onun da 104 oya ihtiyacı var ama K205, K206 ve K207 ona oy verecektir! Kendi oyunu ve rüşvetlerden gelen 100 oyu da ekleyince işler tıkırında. Rüşvetleri, K204'ün teklifinde 0 alan korsanlara vermek zorundadır:

K1	K2	K3	K4	...	K198	K199	K200	K201	K202	K203	K204	K205
*	0	*	0		0	*	0	*	*	0	0	

K206	K207	K208
0	0	0

Şimdi ortaya yeni bir desen çıktı ve sonsuza kadar da devam edecek. En çelimsiz 200 korsanın arasında olamamalarına rağmen tekliflerinin kabul edilme ihtimali olan korsanlar, ne teklif verirse versin gemiden atılacak –ve bu yüzden de oyları herhangi daha amansız bir korsanın cebinde olan– korsanlardan oluşan ve giderek daha uzayan aralıklarla birbirlerinden ayrılıyorlar. Kaderin sillesini yememiş korsanların numaraları K201, K202, K204, K208, K216, K232, K264, K328, K456, ... gibidir –200 artı 2'nin kuvvetleri.

Geriye, kabul edeceklerinden kesinlikle emin olmak için kimlere rüşvet verileceğini çıkarmak kaldı. Daha önce de söylediğim gibi, tek bir çözüm yok ama K201 için K1-K199 arasındaki tek sayılı korsanlara, K202 için K2-K200 arasındaki çift sayılı korsanlara, sonra K204 tek sayılılara, K208 çift sayılılara ve bunun gibi çift-tek arasında gidip gelerek ilerlemek çözümlerden biri. Her neyse, sonunda gösteriyoruz ki 500 korsan için en uygun stratejide ilk 44 korsan gemiden atılıyor ve sonra da K456 rüşvetleri K1, K3, K5, ... K199 arasında birer altın şeklinde paylaştırıyor.

Demokratik yapıları sağ olsun ki korsanlar sistemlerini, en amansızların çoğunlukla gemiden atıldığı ya da en iyi ihtimalle, hiç altın almadan kurtulduklarına dua ettikleri şekilde yürümesi için ayarlamışlar. Sadece en çelimsiz 200 korsanın, onlarında anca yarısının bir şeyler beklemeye hakkı var. Gerçekten de çelimsizler dünyanın gerçek sahipleri.

20

Milyon-Dolar Mayın Tarlası



Bir bilgisayar oyununu inceleyerek
milyon dolar kazanmak her gün olacak
iş değildir ama kaderin ilginç bir cilvesi
sayesinde, bunu başarabilmeniz mümkün.
Ne var ki ganimetleri ancak bütün
uzmanların yanılması ve olağanüstü
zor olduğunu düşünülen bir problemin
aslında kolay olması durumunda
kazanabileceksiniz. Yani Ferrari'yi
şimdiden sipariş etmeyin.

Ödül, işadamı Landon T. Clay tarafından Cambridge Massachusetts'de yeni kurulmuş Clay Matematik Enstitüsünün matematiksel bilgiyi yaymak amacıyla koyduğu ve her biri bir milyon dolar etiketine sahip yedi sorudan biri için. Oyunumuz, Microsoft Windows'un içinde hazır gelen ve bilgisayar tarafından verilen ipuçlarını kullanarak bir ızgara üzerindeki mayınların konumunu tahmin etmek üzerine kurulu, Mayın Tarlası'dır. Ve soru da matematikteki en kötü üne sahip açık sorulardan biri olan, "P=NP?" isminin haklı sahibi.

Oyun ve ödüllü soru arasındaki ilişki, İngiltere'deki Birmingham Üniversitesinden Richard Kaye tarafından açıklanmıştır (Bakınız Ek Kaynaklar). Ve kimse heyecanlanmadan söyleyelim ki oyunu kazanarak ödülü kazanmanız söz konusu değil. Ödülü kazanmak için, mayın tarlası devasa boyutlarda oynandığında ortaya çıkan soruları çözmenin cıva gibi bir yöntemini bulmanız lazım –ve bütün ipuçları böyle cıva gibi bir yöntemin var olmadığı yönünde. Aslında, böyle bir şeyin var olmadığını *ispatlamanız* da ödülü kazanmak için yeterli.

İşe mayın tarlasıyla başlayalım. Bilgisayar oyunu ilk açtığında size gösterdiği şey, boş karelerden oluşan bir ızgaradır. Bazı karelerin altında mayınlar gizli; geriye kalanlarsa güvenli. Sizin göreviniz bütün mayınların konumlarını, hiçbirini patlatmadan çıkarmak. Bunu bir kare seçerek yapacaksınız. Eğer altında bir

mayın vardıysa mayın patlayacak ve oyun –tabii ki sizin kaybetmenizle– sona erecektir. Eğer mayın yoktuysa, gel gelelim, bilgisayar o karenin içine bir sayı yazarak karenin 8 bitişik komşusunda (yatay, dikey ve çapraz) kaç tane mayın olduğunu söyleyecektir.

İlk tahmininiz bir mayına denk gelirse, şansınıza küsün: oyunu kaybetdiğinizden başka hiçbir bilgi elde edemediniz. Yok ama gelmezse, yakın mesafedeki mayınlar hakkında kısmi bir bilgi edinmiş olursunuz. Bu bilgiyi kullanarak bir sonraki kararınızı verdiğinizde de yine ya bir mayını patlatır ve oyunu kaybedersiniz ya da yakınlardaki mayınlar hakkında bilgiler elde edersiniz. Eğer arzu ederseniz bir kareyi, mayın içerdiğini gösterecek şekilde işaretleyebilirsiniz: hatalıysanız, oyunu kaybedersiniz. Bu yolla devam ederek, bütün mayınların konumu bulup işaretlerseniz oyunu kazanabilirsiniz.

Örneğin, birkaç hamle yaptıktan sonra Şekil 77'de gösterilen konuma ulaşabilirsiniz. Burada yıldız, bilinen bir mayını (konumu hesaplanarak çıkarılmış), sayılar bilgisayardan aldığınız bilgileri ve harfler de durumu açıklığa kavuşmamış kareleri belirtir. Biraz düşünerek A ile işaretlenmiş karelerin, hemen altlarında duran 2'lerden dolayı mayın içerdiği sonucuna ulaşabilirsiniz. B ile işaretlenmiş kareler de yakınlarındaki 4'ler ve 5'ler yüzünden mayın içermek zorundadır. Aynı yolla C de mayın içermek zorundadır ve bunu takiple D ve E mayın içeremez. Böylece F'nin durumu, birkaç hamle sonra D'yi açıp da hangi sayıyı içerdiği ortaya çıkınca, anlaşılacaktır.

F	D	2	1	2	1
A	A	3	*	4	B
2	2	3	*	5	B
0	0	1	1	4	B
0	1	1	1	2	B
0	1	C	E	E	E

Şekil 77

Tipik Mayın Tarlası konumu.

Şimdi P=NP? sorusuna gelelim. Bir algoritmanın, belirli bir problemin çözülmesi için bir bilgisayarca çalıştırılabilecek, her

adımı bir programca özel olarak belirlenmiş prosedür olduğunu hatırlayın. Hesaplamalı matematiğin merkezindeki sorulardan biri şudur: bir algoritma belirli bir soruyu ne kadar verimli bir şekilde çözebilir? İşlem süresi –bir cevap alabilmek için gerekli olan işlem sayısı– ve başlangıç verileri arasındaki ilişki nedir? Kuramsal amaçlar ışığında en temel ayrım, P tipi –polinom zaman– olan ve olmayan problemler arasındadır. Çalışma süresi, başlangıç verilerini belirtmek için gerekli olan sembol sayısının sabit bir kuvvetinden daha hızlı büyümeyen bir algoritma tarafından çözülebilen problemlere, P tipi denir. Diğer bütün problemler "P tipi olmayan" olarak ifade edilir. Sezgisel olarak düşünüldüğünde P'deki problemler verimli bir şekilde çözülebilirler ama P'de olmayan problemlerin herhangi algoritmik bir yöntemle pratik olarak çözülmesi mümkün değildir çünkü çalıştırılması gereken bütün algoritmalardan cevap almak saçmalık derecesinde uzun sürecektir. P tipi problemler basittir, P tipi olmayanlarsa zor. Tabii ki işler o kadar basit değil ama bu yine de pratik amaçlar altında, iyi bir kural.

Bir problemin P tipi olduğunu, onu polinom zamanda çözen bir algoritma sergileyerek ispatlayabilirsiniz. Örneğin, bir sayı listesinin değerlerine göre sıralanması P tipi bir problemdir ki bu sayede ticari veritabanları, verileri düzenleme yetisine sahiptir; ve bir dizgide, bir dizi sembolü aramak da P tipidir ki ticari kelime işlemcileri bu sayede bul ve değiştir işlemlerini gerçekleştirebilir. 2003 senesinde, birçok matematikçinin şaşkın bakışları altında, bir sayının asal olup olmadığını test etmenin, basamak sayısının 12'inci kuvvetinden fazla işlem gerektirmeyen P tipi bir problem olduğu ispatlandı (Bakınız Agrawal, diğerleri ve Bornemann, Ek Kaynaklar).

Buna karşılık Gezgin Satıcı Probleminin –satıcının bir yolculukta bütün şehirleri gezebileceği en kısa güzergahı bul– genel olarak P tipi olmadığına düşünülüyor ama böyle bir şey ispatlanmış değil. Bir tam sayının asal çarpanlarını bulmanın da genel olarak P tipi olmadığı inanılıyor ama bu da ispatlanmış değil. İnternet üzerinden kredi kartı bilgileri gibi kişisel bilgilerin gön-

derilmesinde kullanılan, bazı belli başlı şifreleme işlemlerinin güvenliği de bu inancın doğruluğuna bağlı.

Bir problemin P tipi olmadığını ispatlamak neden bu kadar zor? Çünkü bunu herhangi belirli bir algoritmayı test ederek yapmanız mümkün değil. *Bütün muhtemel algoritmaları* incelemeniz ve bunlardan hiçbirinin problemi polinom zamanda çözemeyeceğini göstermeniz gerekli. Bu akıllara durgunluk veren bir iş. Bu güne kadar yapılabilmiş en iyi iş, geniş bir sınıf P-değil adayının aynı temele dayandığını –herhangi birinin polinom zamanda çözülebilmesi durunda hepsinin polinom zamanda çözülebileceğini– göstermek olmuş. Bu sınıflandırmaya giren problemlere, "belirsiz polinom zamanda çözülebilen," kısaca "NP tipi" denir.

P tipi değil ile NP, aynı şey değildir. Önerilen çözümlerinin, *gerçekten de* bir çözüm olup olmadığı polinom zamanda kontrol edilebilen problemlere NP tipi denir ki bu, çözümü polinom zamanda bulmaktan çok daha az stresli bir işlemdir. Bu noktada en beğendiğim örnek yapboz bulmacasıdır. Bulmacayı çözmek gerçekten de zor olabilir ama birisi çözdüğünü iddia ediyorsa, bunun doğruluğunu kontrol etmek için kısa bir bakış atmak genellikle yeterli olacaktır. İşlem süresinin yaklaşık sayısal değerini hesaplamak için sırayla her parçayı incelediğinizi ve bitişiğindeki parçalarla uyumlu olup olmadığını kontrol ettiğinizi düşünün. Bu işlemi yapmak için gerekli olan hesap sayısı, kabaca da olsa parça sayısıyla orantılıdır, yani kontrol işlemi polinom zamanda çalışır. Ama bulmacayı bu yolla çözemeyeceğiniz gibi, her muhtemel çözümü sırayla kontrol etmeniz de muhtemel çözümlerin sayısı parça sayısının sabit bir kuvvetinden çok daha hızlı büyüyeceğinden, mümkün değildir.

Birçok NP tipi problemin "denk" işlem süreleri olduğu ortaya çıkmıştır. Özel olarak NP tipi bir problemin polinom zaman çözümünün varlığı, bütün NP tipi problemlerin polinom zamanda çözülebileceğini ima ediyorsa o probleme NP-tam denir. Birini polinom zamanda çözdün mü, hepsini çözdün. Çok geniş bir problem yelpazesinin NP-tam olduğu biliniyor. Meşhur P=NP?

problemi, P ve NP tipi problemlerin (tersine bütün ipuçlarına rağmen) eşit olup olmadığını soruyor. Beklenen cevap "hayır". Ne var ki NP-tam *herhangi* bir problemin P tipi olduğu –polinom zamanda çözümü mümkün oluğu– ortaya çıkarsa NP, P'ye eşit olmak zorundadır. Haliyle de NP-tam problemlerin P tipi olmadığı beklentisi içerisindeyiz ama kimse bunu ispatlayabilmiş değil.

NP-tam olduğu bilinen en basit problemlerden biri de SAT, bir Boolean koşulunun mantıksal sağlanabilirliği. Boolean devreleri, VE, VEYA ve DEĞİL gibi mantık kapılarından inşa edilir. Bu devrelerin girdileri, D (doğru) ya da Y (yanlış)'dan ibarettir. Her kapı belirli bir sayıda girdi kabul eder ve bu bileşimin mantıksal değerini çıkarır. Örneğin bir VE kapısı, p, q girdilerini alır ve p VE q çıkarır ki bunun değeri, p = q = D olduğu zaman D ve diğer bütün durumlarda da Y'dir. Bir DEĞİL kapısı D girdisini Y'ye, Y girdisini D'ye çevirir. SAT problemi şunu sorar, verilen bir Boolean devresi için D çıktısını verecek girdi seçenekleri var mıdır? Kulağa kolay geldiyse, bir devrenin çok yüksek sayıda kapı ve çok yüksek sayıda girdi içerebileceğini hatırlatmak isterim.

Bilgisayar oyunuyla arasındaki bağıntı, Mayın Tarlası Tutar-

★	2	★			
★	★	★			
				0	0
6				0	1

Şekil 78

Mayın tarlasında, imkansız bir konum.

lılık Problemini tanımlamamızla ortaya çıkıyor. Bu mayınları *bulmak* üzerine değil de Mayın Tarlası olarak sunulan bir oyunun mantıksal olarak tutarlı olup olmadığını kontrol etmekle alakalı. Örneğin, oyun seyrindeyken Şekil 78'le karşılaşırsanız, programcının bir hata yaptığını anlarsınız: verilen bilgiyle tutarlı mayın konumlandırması yoktur. Kaye, Mayın Tarlası ile SAT'nin aşağıdaki mana altında denk olduklarının ispatlar. Belirli bir Bo-

olean devresi için verilen SAT problemi, polinom zamanda çalışan bir hazırlama prosedürü kullanılarak oyundaki bir duruma, Mayın Tarlası Tutarlılık Problemi olarak "kodlanabilir". Bu sebeple, Mayın Tarlası Tutarlılık Problemini polinom zamanda çözülebilirse, o devre için olan SAT problemi de polinom zamanda çözülmüş olur. Bir başka deyişle, Mayın Tarlası NP-tamdır. Yani, parlak bir zeka Mayın Tarlası için polinom zamanda çalışan bir çözüm bulabilirse veya böyle bir çözümün var olmadığını gösterebilirse P=NP? problemi (öyle ya da böyle) çözülmüş olur.

Kaye'in verdiği ispat, Boolean devrelerini Mayın Tarlası konumlarına çevirmek için sistematik bir prosedür kullanır. Burada oyun tahtası üzerindeki bir kare mayın içeriyorsa D durumunda, içermiyorsa da Y durumunda kabul edilir. İlk adım kapılarla değil, onları birleştiren kablolarla ilgilidir. Şekil 79 bir mayın tarlası kablosunu sergilemektedir. *x* olarak işaretlenmiş bütün kareler bir mayın içeriyor (D) ya da içermiyor (Y) olabilir ama biz hangi durumun doğru olduğunu bilmiyoruz. *x*' olarak işaretlenmiş kareler de *x*'in tam tersini yapıyor. Sizin kontrol etmeniz gereken şey, *x* doğru ya da yanlış olsun, bütün sayıların tutarlı olması. Kablonun etkisi D veya Y sinyalini, bir kapıya girecek şekilde boylu boyunca "iteklemesi".

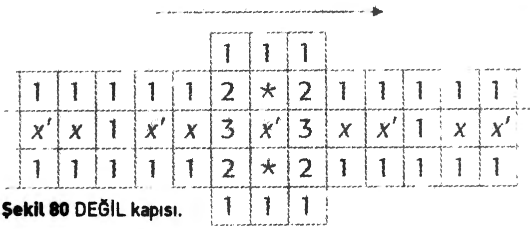
Şekil 80 bir DEĞİL kapısı sergiliyor. Ortadaki blokta işaretlenmiş olan sayılar, kablonun çıkışındaki *x* ve *x*''ı, girişteki konumlarına göre yer değiştirmeye zorluyor. VE kapısı (Şekil 81) daha karmaşık. İki girdi kablosu *U*, *V* ve bir çıktı kablosu *W* var.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x'	x	x'	x	x'	x	x'	x'	x'	x	x'	x	x'
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

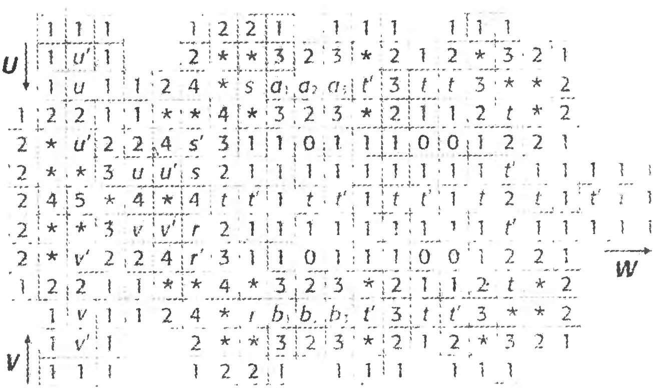
Şekil 79 Bir kablo.

Bunun bir VE kapısı olduğunu göstermek için çıktının D olduğunu varsayıp girdilerin ikisinin de D olmak zorunda olduğunu ispatlayacağız. Çıktı D olduğundan her *t* sembolü bir mayını ve her *t'* sembolü boş bir kareyi ifade etmek zorunda. Şimdi, a_3'ün altındaki ve üstündeki 3'ler, a_2 ve a_3'ün mayın olması gerektiğini ima eder, yani a_1 mayın olamaz, yani *s* bir mayındır. Benzer şekilde *r* de bir mayındır. O zaman merkezdeki 4'ün komşusu olan 4 mayını bulduk ki bu da *u'* ve *v'*'ın mayın olmadıklarını ima eder, yani *u* ve *v* birer mayındır –ve bu da *U* ve *V'*nin değerinin D olduğunu gösterir. Öteki taraftan *U* ve *V'*nin değeri D ise *W'*nun değeri de D'dir. Kısaca, iddia ettiğimiz gibi bir VE kapımız vardır.

Mayın tarlası elektronikleri burada bitmez –örneğin kabloları eğebilmemiz, kesebilmemiz, birleştirebilmemiz veya dokunmadan birbirlerinin üstünden geçirebilmemiz gereklidir. Kaye bütün bu problemleri ve daha ince detaylı olanları kendi



Şekil 80 DEĞİL kapısı.



Şekil 81 VE kapısı.

makalesinde çözmüş. Neticede Mayın Tarlası Tutarlılık Problemini çözmek, Sat problemini çözmekle aynı iştir ve bu yüzden de NP-tamdır. Fiilen her matematikçi ve bilgisayar bilimci için bu, Mayın Tarlası Tutarlılık Probleminin doğuştan zor olduğunu gösterir. Böylesine basit bir oyunun böyle ipe sapa gelmez sonuçlarının olması, gerçekten de hayret verici ama matematiksel oyunlar hep böyledir.

Eğer söz ettiğimiz milyon dolarlık ödüllerle ilgileniyorsanız bir uyarım var. Clay Enstitüsü bir çözümü geçerli olarak kabul etmek için çok kesin kurallar ortaya koyuyor. Mesela, büyük ve hakemli dergilerden birinde yayınlanmış olması ve yayınlandıktan sonra iki sene içerisinde, matematiksel cemaat tarafından "genel olarak kabul edilmesi" gerekmektedir. Ama o kadar yıldırıcı bir şeyle çalımlaşmak istemiyorsanız bile, bizim zamanımızın çözülmemiş en büyük sorularından birini kapsadığı düşüncesiyle Mayın Tarlası oynayarak da baya eğlenebilirsiniz.

Ek Kaynaklar

Bölüm 1: Biliyorum ki Sen Biliyorsun ki...

David Gale, More Paradoxes: Knowledge Games, *Mathematical Intelligencer* vol. 16 no. 4 (1994) 38-44.

J.M. Lasry, J.M. Morel, and S. Solimin, On knowledge games, *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid* vol. 2 (1989).

Bölüm 2: Domino Teorileri

Martin Gardner, *Mathematical Puzzles and Diversions from Scientific American*, Bell, London 1961.

Russ Honsberger, *Mathematical Gems I*, Mathematical Association of America, Washington DC 1973.

Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*, Allen and Unwin, London1943.

Bölüm 3: Masanın Öteki Ucu

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, *Winning Ways* vol. 2, Academic Press, New York 1982.

Bölüm 4: Antrapomörfik İlke

Robert Matthews, Tumbling toast, Murphy's Law, and the fundamental constants, *European Journal of Physics* vol. 18 (1995) 172-176.

Robert Matthews, The science of Murphy's Law, *Scientific American*, (April 1997), 72-75.

Bölüm 5: Güneşin Sığırlarını Saymak

Albert H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, New York 1964.

David Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, 1987.

Harry L. Nelson, A solution to Archimedes' Cattle Problem, *Journal of Recreational Mathematics* vol. 13 (1981) 162-176.

C. Stanley Ogilvy, *Tomorrow's Math* (2nd ed.), Oxford University Press, New York 1972.

Ilan Vardi, Archimedes' Cattle Problem, *American Mathematical Monthly* vol. 105 no. 4 (April 1998).305-319.

Bölüm 6: Büyük Gider Soygunu

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, New York 1991.

H. Joris, Le chasseur perdu dans la foret, *Elementa Mathematicae* vol. 35 (1980) 1-14.

Bölüm 7: Çift Çözümlü Yapbozlar

Greg N. Frederickson, *Dissections: Plane and Fancy*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

Harry Lindgren, *Geometric Dissections*, Van Nostrand, Princeton 1964. Ian Stewart, From Here to Infinity, Oxford University Press, Oxford 1996.

Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

Bölüm 8: Hor Görülmüş Bir Sayının Hikayesi

Mario Livio, *The Golden Ratio*, Broadway, New York 2002.

Benjamin M. M. de Weger, Padua and Pisa are exponentially far apart, *Publicacions Matematiques* vol. 41 (1997) 631-651.

Bölüm 11: Bilgisayarlı Tarihe Giriş

Nachum Dershowitz and Edward M. Reingold, *Calendric Calculations: the Millennium Edition*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

Bölüm 12: Ganimetleri Paylaşmak

Steven J. Brams and Alan D. Taylor, An envy-free cake division protocol, *The American Mathematical Monthly* vol. 102 (Jan. 1995) 9-18.

David Gale, Mathematical entertainments, *The Mathematical Intelligencer* vol. 15 no. 1 (1993) 50-52.

Bölüm 13: Kareleri Kareleyelim

R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, *Duke Mathematical Journal* vol. 7 (1940) 312-340.

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York 1991, p. 81.

David Gale, Mathematical entertainments, *The Mathematical Intelligencer* vol. 15 no. 1 (1993) 48-50.

Martin Gardner, *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Bell, London 1963.

Bölüm 14: Körüklü Sanı

W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, Macmillan, London 1939.

Bölüm 15: Amaçsal Piramit Yığılımı

Stuart Kirkland Wier, Insight from geometry and physics into the construction of Egyptian Old Kingdom pyramids, *Cambridge Archaeological Journal* vol. 6 (1996) 150-163.

Bölüm 16: Nokta ve Kutular'da Büyük Usta Olmak

Elwyn Berlekamp, *The Dots and Boxes Game*, A. K. Peters, Natick MA 2000.

Bölüm 17: Çekimser Çikolata Çokurdatmaları

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, *Winning Ways*, Academic Press, New York 1982, p. 598.

David Gale, *Tracking the Automatic Ant*, Springer, New York, 1998.

Bölüm 18: Karanlık Noktalar

George Tokarsky, Polygonal rooms not illuminable from every point, *American Mathematical Monthly* vol. 102 no. 10 (1995) 867-879.

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York 1991.

Victor Klee and Stan Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, Washington DC 1991.

Bölüm 20: Milyon Dolar Mayın Tarlası

Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nittin Saxena, PRIMES is in P, IIT Kanpur preprint August 8 2002; http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html

Folkmar Bornemann, PRIMES is in P: a breakthrough for "Everyman", *Notices of the American Mathematical Society* vol. 50 no. 5 (2003) 545-552.

Richard Kaye, Minesweeper is NP-complete, *Mathematical Intelligencer* vol. 22 no. 2 (2000) 9-15.

